Corrigé de la première épreuve du CAPES interne 2004.

A toute fonction numérique *f*, définie sur **R** ou **R*,** on associe les fonctions φ et Ψ définies sur **R*** respectivement par :

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\Psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$

On donne maintenant la définition suivante :
Une fonction *f*, définie sur **R** ou sur **R***, est *dite symétriquement dérivable en* 0 lorsque la fonction associée ψ admet une limite finie en 0 (notée $f'_s(0)$).

Préambule

La fonction *f* étant définie sur **R**, on note Γ sa courbe représentative dans un repère cartésien du plan, $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

A, B, C, D, E sont les points de Γ d'abscisses respectives 0 ; -1 ; - 0,5 ; 0,5 ; 1 donc le coefficient directeur de la droite (AB) est $\varphi(-1)$, celui de (AC) est $\varphi(-0{,}5)$, celui de (AD) est $\varphi(0{,}5)$, celui de (AE) est $\varphi(1)$, celui de (BE) est $\Psi(1)=\Psi(-1)$ et celui de (CD) est $\Psi(0{,}5)=\Psi(-0{,}5)$

$\varphi(x)$ est le coefficient directeur de la sécante (MA) à Γ en $M\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}0\\f(0)\end{pmatrix}$.

$\Psi(x)$ est le coefficient directeur de la sécante (MN) à Γ en $M\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}-x\\f(-x)\end{pmatrix}$,

d'où la parité de la fonction Ψ. En effet, $\Psi(-x)$ est aussi le coefficient directeur de la sécante (MN)

(Ce résultat est demandé à la question 2.1.1. , mais il est tellement évident ici que je l'ai tout de suite mentionné. Je m'en sers pour réduire les calculs dans certaines questions comme les exemples de la première partie. Qu'en penserait un correcteur ? Que du bien, je pense. Je n'affirme pas, je ne suis pas spécialiste)

Première partie : étude de quelques exemples

1.1 **Exemple 1**. Dans cette question, on considère comme fonction *f* la fonction exponentielle de base *e* :

$$f(x)=e^x$$

1.1.1. On appelle Γ la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal

1.1.1.1. Soient x_0 un réel quelconque et M_0 le point de Γ d'abscisse x_0.
La tangente en M_0 à Γ a pour équation :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y=e^{x_0}(x-x_0)+e^{x_0}$$

$$y=e^{x_0}x+e^{x_0}(1-x_0)$$

L'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses, noté (*Ox*), est solution de l'équation :

$$0=e^{x_0}x+e^{x_0}(1-x_0)$$

$$x \in \mathbb{R},\ e^x > 0 \text{ donc } 0 = x + 1 - x_0$$
$$x = x_0 - 1$$

L'abscisse du point d'intersection de la tangente en $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ e^{x_0} \end{pmatrix}$ avec (Ox) est $x_0 - 1$

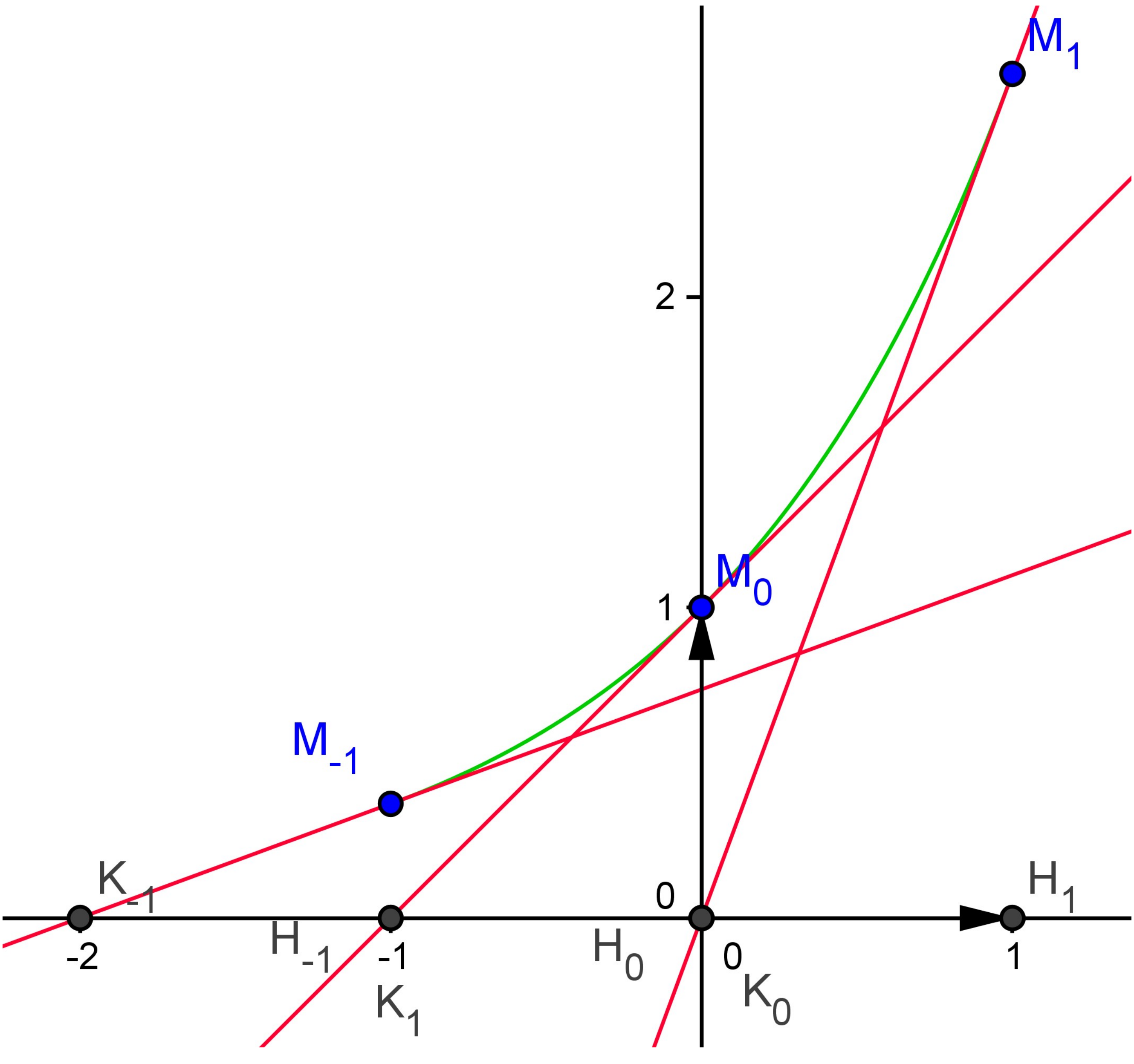
Construction de la tangente à en Γ en M_0

Soit M_0 un point de Γ, H son projeté orthogonal sur l'axe (Ox) et K le translaté de H par la translation de vecteur $\overrightarrow{-i}$.

M_0 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ e^{x_0} \end{pmatrix}$, H a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et H a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

H et M_0 sont deux points de la tangente en M_0, donc (HM_0) est la tangente à Γ en M_0.

1.1.1.2. Allure de Γ sur l'intervalle [-1 ; 1]



1.1.2. La fonction Ψ associée à *f* est définie sur **R*** par :

$$\Psi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$$

$$\Psi(x)=\frac{\left(e^{2x}-1\right)e^{-x}}{2x}$$

$$\Psi(x)=\frac{e^{2x}-1}{2x}\ \frac{1}{e^x}$$

$\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$ donc en posant $u = 2x$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$

Par continuité, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=1$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\Psi(x)=1$

f est symétriquement dérivable en 0 et $f'_s(0)=1=f'(0)$.

1.1.3. Valeurs à 10^{-3} près par défaut de $\varphi(x)$ et $\Psi(x)$ pour les valeurs de *x* appartenant à l'ensemble E :

E = {- 0,5 ; - 0,4 ; - 0,3 ; - 0,2 ; - 0,1 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5} .

x	$\varphi(x)$
-0,5	0,786
-0,4	0,824
-0,3	0,863
-0,2	0,906
-0,1	0,951
0,1	1,051
0,2	1,107
0,3	1,166
0,4	1,229
0,5	1,297

x	$\Psi(x)$
-0,5	1,042
-0,4	1,026
-0,3	1,015
-0,2	1,006
-0,1	1,001
0,1	1,001
0,2	1,006
0,3	1,015
0,4	1,026
0,5	1,042

1.2. **Exemple 2.** Dans cette question, la fonction *f*, définie sur **R**, est une fonction affine :

$$f(x) = mx + p,$$

où *m* et *p* sont deux nombres réels.

$$\varphi(x)=\frac{mx+p-p}{x}=m$$

$$\Psi(x)=\frac{mx+p-(-mx+p)}{2x}=\frac{2mx}{2x}=m$$

$$\varphi=\Psi$$

1.3. **Exemple 3.** Dans cette question, la fonction *f*, définie sur **R**, est une fonction polynôme dont le degré est au plus égal à 2 :

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,$$

où $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont trois nombres réels.

1.3.1. $f'(x)=2\alpha x+\beta$

$f'(0)=\beta$

1.3.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\Psi(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma - (\alpha x^2 - \beta x + \gamma)}{2x}$$

$$\Psi(x) = \frac{2\beta x}{2x}$$

$$\Psi(x) = \beta$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\Psi(x) = f'(0)$.

Graphiquement.

Si $\alpha = 0$ la fonction est affine et les « sécantes », tangentes et courbe Γ sont confondus.

Si $\alpha \neq 0$ la courbe Γ est une parabole.

Pour tout x réel non nul, $\Psi(x)$ est le coefficient directeur de la sécante (*MM'*) à la parabole en $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} -x \\ f(-x) \end{pmatrix}$

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la parabole en $A\begin{pmatrix} 0 \\ f(0) \end{pmatrix}$

Si *M* est un point d'abscisse *x* non nul de la parabole, *M '* le point d'abscisse -*x* de la parabole alors la sécante (*MM '*) est parallèle à la tangente en $A\begin{pmatrix} 0 \\ f(0) \end{pmatrix}$

1.4. Etude des dérivabilités.

1.4.1. **Exemple 4.** La fonction *f* est définie sur **R** par $f(x) = |x|$

Dérivabilité en 0.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$

Si $x > 0$, $\varphi(x) = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = 1$

La fonction *f* est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$

Si $x < 0$, $\varphi(x) = -1$ et $\lim_{x \to 0^-} \varphi(x) = -1$

La fonction *f* est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$

$f'_d(0) \neq f'_g(0)$ donc la fonction *f* n'est pas dérivable en 0.

Dérivabilité symétrique en 0.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\Psi(x) = \frac{|x| - |-x|}{2x} = 0$

$\lim_{x \to 0} \Psi(x) = 0$

La fonction *f* est symétriquement dérivable en 0 et $f'_s(0) = 0$

1.4.2. **Exemple 5.** La fonction *f* est définie sur **R** par $\begin{cases} \text{pour } x \geqslant 0,\ f(x)=1 \\ \text{pour } x<0,\ f(x)=0 \end{cases}$

Dérivabilité en 0.
La fonction *f* n'est pas continue en 0, donc n'est pas dérivable en 0.

On va préciser la dérivabilité à droite est à gauche (je ne pense pas que ce soit nécessaire de faire cette étude le jour de l'épreuve).

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x)=\dfrac{1-1}{x}=0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)=0$

La fonction *f* est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$

Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $\varphi(x)=\dfrac{-1}{x}=0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x)=+\infty$

La fonction *f* n'est pas dérivable à gauche en 0.

Dérivabilité symétrique en 0.

La fonction Ψ est paire donc, $\Psi(-x)=\Psi(x)=\dfrac{1}{|x|}$

$\lim\limits_{x \to 0} \Psi(x)=+\infty$

La fonction *f* n'est pas symétriquement dérivable en 0.

1.4.2. **Exemple 5.** La fonction *f* est définie sur **R** par $\begin{cases} \text{pour } x \geqslant 0,\ f(x)=\sqrt{x} \\ \text{pour } x<0,\ f(x)=-\sqrt{-x} \end{cases}$

Dérivabilité en 0.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$

$x>0$ donc $x=\sqrt{x}^2$ et $\varphi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)=+\infty$

La fonction *f* n'est pas dérivable à droite en 0.

(Je pense que le jour de l'épreuve, on peut directement conclure que *f* n'est pas dérivable en 0. Je pense mais je ne suis pas un spécialiste)

On peut remarquer que la fonction *f* est impaire, l'identité est impaire et qu'en conséquence la fonction φ est paire.

Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x)=+\infty$

La fonction *f* n'est pas dérivable à gauche en 0.

f n'est pas dérivable en 0.
Dérivabilité symétrique en 0.

La fonction Ψ est paire donc, $\Psi(-x)=\Psi(x)=\frac{2\sqrt{|x|}}{2|x|}=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$

$\lim_{x\to 0}\Psi(x)=+\infty$

La fonction *f* n'est pas symétriquement dérivable en 0.

Deuxième partie : quelques résultats généraux

Soit *f* une fonction numérique définie sur **R**.

2.1.

2.1.1. Pour tout *x* non nul :

$$\Psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{f(x)-f(0)+f(0)-f(-x)}{x}\right)$$

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right)$$

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(-x))$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $-x\in\mathbb{R}^*$ et $\Psi(-x)=\frac{1}{2}(\varphi(-x)+\varphi(x))=\Psi(x)$ donc la fonction Ψ est paire.

(J'ai démontré ce résultat dans le préambule)

2.1.2. *Propriété 1* : Si la fonction *f* est dérivable en 0, alors elle est symétriquement dérivable en 0.

Démonstration.

Si *f* est une fonction dérivable en 0 alors :

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\varphi(-x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}$$

En posant *t* = -*x*, x tend vers 0 donc *t* tend vers 0 et :

$$\lim_{x\to 0}\varphi(-x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\Psi(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}(\varphi(-x)+\varphi(x))=f'(0)$$

C.Q.F.D.

$\lim_{x\to 0}\Psi(x)=f'_s(0)$

Si *f* est dérivable en 0 alors $f'_s(0)=f'(0)$.

2.1.3. La fonction *f* est définie sur **R** par $f(x)=|x|$, question 1.4.1. Exemple 4, n'est pas dérivable en 0 mais symétriquement dérivable en 0. La réciproque de la propriété 1 est fausse.

2.2. *Propriété 2* : Si la fonction *f* est paire, alors elle est symétriquement dérivable en 0.

Si *f* est une fonction paire, définie sur $\mathbb{R}^*$ par hypothèse, alors :

$$\Psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$

$$\Psi(x)=\frac{f(x)-f(x)}{2x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\Psi(x)=0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

2.3. *Propriété 3* : Si la fonction *f* est impaire, alors elle est dérivable en 0 si, et seulement si, elle est symétriquement dérivable en 0.

Démonstration.

On a démontré que si *f* est dérivable en 0 alors elle est symétriquement dérivable en 0

Réciproque. Si *f* est impaire, et définie en 0 (un petit oubli dans l'énoncé), alors $f(0)=0$.

$$\Psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$

$$\Psi(x)=\frac{f(x)-f(0)+f(x)-f(0)}{2x}=\varphi(x)$$

f est symétriquement dérivable en 0 donc :

$$\lim_{x\to 0}\Psi(x)=l\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\varphi(x)=l\in\mathbb{R}$$

f est dérivable en 0 et $f'(0)=f'_s(0)$ C.Q.F.D.

2.4 La fonction racine cubique est continue en 0. Elle est impaire et non dérivable en 0 donc non symétriquement dérivable. Un autre exemple est la fonction définie au 1.4.3.

2.5 La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2 \text{ si } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

Cette fonction est non continue en 0. Elle est paire donc dérivable symétriquement en 0.

Troisième partie : deux approximations de $f'(0)$ pour l'exponentielle népérienne

Dans cette partie, on considère comme fonction f la fonction exponentielle de base e :

f définie par $f(x)=e^x$

3.1. L'ensemble E est celui définie en 1.1.3.

3.1.1. $x\in$E. Tableau des valeurs approchée de $|\varphi(x)-f'(0)|$

x	$\|\varphi(x)-f'(0)\|$
-0,5	-0,213
-0,4	-0,176
-0,3	-0,136
-0,2	-0,094
-0,1	-0,048
0,1	0,052
0,2	0,107
0,3	0,166
0,4	0,230
0,5	0,297

$|\varphi(x)-f'(0)|\leqslant 0{,}1$ pour $x\in\{-0{,}2\ ;\ -0{,}1\ ;\ 0{,}1\}$
$|\varphi(x)-f'(0)|\leqslant 0{,}01$ n'a pas de solution dans E.

3.1.2. $x\in$E. Tableau des valeurs approchée de $|\Psi(x)-f'(0)|$

x	$\|\Psi(x)-f'(0)\|$
-0,5	0,042
-0,4	0,027
-0,3	0,015
-0,2	0,007
-0,1	0,002
0,1	0,002
0,2	0,007
0,3	0,015
0,4	0,027
0,5	0,042

$|\Psi(x)-f'(0)|\leqslant 0{,}1$ pour tout $x\in$E
$|\Psi(x)-f'(0)|\leqslant 0{,}01$ pour $x\in\{-0{,}2\ ;\ -0{,}1\ ;\ 0{,}1\ ;\ 0{,}2\}$

3.2 $x\in I=[-0{,}5\ ;\ 0{,}5]$

3.2.1 Soit les fonction α et β définie par :

$$\alpha(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}e^{-0{,}5}$$

$$\beta(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}e^{0{,}5}$$

Variations de α

$$\alpha'(x)=e^x-1-x\,e^{-0{,}5}$$

$$\alpha''(x)=e^x-e^{-0{,}5}$$

La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante, $\alpha(-0{,}5)=0$ donc $\alpha''(x)>0$ sur $]-0{,}5\ ;\ 0{,}5]$ et la fonction α' est strictement croissante sur *I*.
$\alpha'(0)=0$ donc $\alpha'<0$ sur $[-0{,}5\ ;\ 0[$ et $\alpha'>0$ sur $]0\ ;\ 0{,}5]$
α est strictement décroissante sur $[-0{,}5\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ 0{,}5]$ et $\alpha(0)=0$ est le minimum de α sur *I*.

Variations de β

$$\beta'(x)=e^x-1-xe^{0,5}$$
$$\beta''(x)=e^x-e^{0,5}$$

La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante, $\beta(0{,}5)=0$ donc $\beta''(x)<0$ sur $[-0{,}5\ ;\ 0{,}5[$ et la fonction β' est strictement croissante sur *I*.
$\beta'(0)=0$ donc $\beta'>0$ sur $[-0{,}5\ ;\ 0[$ et $\beta'<0$ sur $]0\ ;\ 0{,}5]$
β est strictement croissante sur $[-0{,}5\ ;\ 0]$ et strictement décroissante sur $[0\ ;\ 0{,}5]$ et $\beta(0)=0$ est le maximum de β sur *I*.

3.2.2 $\alpha(0)=0$ est le minimum de α sur *I* donc $\alpha(x)\geqslant 0$ sur I.

$$0\leqslant e^x-1-x-\frac{x^2}{2}e^{-0,5}$$
$$1+x+\frac{x^2}{2}e^{-0,5}\leqslant e^x$$

$\beta(0)=0$ est le maximum de β sur *I* donc $\beta(x)\leqslant 0$ sur *I*.

$$e^x-1-x-\frac{x^2}{2}e^{0,5}\leqslant 0$$
$$1+x+\frac{x^2}{2}e^{-0,5}\leqslant e^x$$

$$1+x+\frac{x^2}{2}e^{-0,5}\leqslant e^x\leqslant 1+x+\frac{x^2}{2}e^{0,5}$$

$$\frac{e^x-1}{x}-1=\frac{e^x-1-x}{x}$$

d'après l'encadrement précédent pour tout *x* non nul de *I* :

$$\frac{x^2e^{-0,5}}{2}\leqslant e^x-1-x\leqslant\frac{x^2e^{0,5}}{2}$$

Si $x\in I$ et $x>0$ comme $e^{-O,5}>O$ alors :

$$0\leqslant\frac{x^2e^{-0,5}}{2x}\leqslant\frac{e^x-1}{x}-1\leqslant\frac{x^2e^{0,5}}{2x}$$
$$0\leqslant\frac{e^x-1}{x}-1\leqslant\frac{xe^{0,5}}{2}$$
$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right|\leqslant\frac{|x|e^{0,5}}{2}$$

Si $x \in I$ et $x < 0$ alors :

$$0 \geqslant \frac{x^2 e^{-0,5}}{2x} \geqslant \frac{e^x - 1}{x} - 1 \geqslant \frac{x^2 e^{0,5}}{2x}$$
$$0 \geqslant \frac{e^x - 1}{x} - 1 \geqslant \frac{x e^{0,5}}{2}$$
$$\left|\frac{e^x - 1}{x} - 1\right| \leqslant \frac{|x| e^{0,5}}{2}$$

Donc pour tout x, non nul, de I : $\left|\frac{e^x - 1}{x} - 1\right| \leqslant \frac{|x| e^{0,5}}{2}$ C.Q.F.D.

3.2.3. On admet que pour tout réel strictement positif de I :
$$\frac{x^2 e^{-0,5}}{6} \leqslant \frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1 \leqslant \frac{x^2 e^{0,5}}{6}$$
Les trois fonctions correspondant aux trois membres de l'encadrement sont paires donc l'encadrement est encore vraie pour tout x strictement négatif de I et donc pour tout x non nul de I :
$$0 \leqslant \frac{x^2 e^{-0,5}}{6} \leqslant \frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1 \leqslant \frac{x^2 e^{0,5}}{6}$$
$$\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1\right| \leqslant \frac{x^2 e^{0,5}}{6}$$

3.2.4. $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, d'après le 3.2.2 pour tout x, non nul, de I : $|\varphi(x) - f'(0)| \leqslant \frac{|x| e^{0,5}}{2}$

$e^{0,5} < 2 \Rightarrow \frac{|x| e^{0,5}}{2} < |x|$ donc pour tout x non nul de $I_1 = [-10^{-2} ; 10^{-2}] \subset I$:
$$|\varphi(x) - f'(0)| \leqslant 10^{-2}$$

$\Psi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$, d'après le 3.2.3 pour tout x, non nul, de I : $|\Psi(x) - f'(0)| \leqslant \frac{x^2 e^{0,5}}{6}$

$e^{0,5} < 2 \Rightarrow \frac{x^2 e^{0,5}}{6} < \frac{x^2}{3}$ donc pour tout x non nul de $I_2 = [-3 \times -10^{-1} ; 3 \times 10^{-1}] \subset I$:
$$|\Psi(x) - f'(0)| \leqslant 10^{-2}$$

3.2.5. Le nombre $\eta_1 = 10^{-2}$ tel que $|x| < \eta_1 \Rightarrow \varphi(x) - f'(0) \leqslant 10^{-2}$ est très inférieur au nombre $\eta_1 = 3 \times 10^{-1}$ tel que $|x| < \eta_2 \Rightarrow \Psi(x) - f'(0) \leqslant 10^{-2}$.

Au voisinage de zéro, $\frac{|x| e^{0,5}}{2} \gg \frac{x^2 e^{0,5}}{6}$ donc $\Psi(x)$ est plus proche de $f'(x)$ que $\varphi(x)$

Quatrième partie : caractérisation des fonctions polynômes de degré 1 ou 2

4.1 *Question préliminaire* : on considère deux réel a et b tels que $a < b$, et un réel x de $[a ; b]$.

4.1.1. Soit la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(t) = (1-t)a + tb = (b-a)t + a$

f est une fonction affine donc continue.
$b > a$ donc $b - a > 0$ et f est strictement croissante.

$f(0)=a$ et $f(1)=b$ d'après le théorème de la bijection (théorème des valeurs intermédiaires pour un fonction strictement monotone) *f* est une bijection de [0 ; 1] dans [*a* ; *b*].

$$\forall x\in[a\ ;\ b], \exists !\, t\in[0\ ;\ 1] \text{ tel que } x=(1-t)a+tb$$

Je traduis :

pour tout *x* de l'intervalle [*a* ; *b*], il existe un unique *t* de l'intervalle [0 ; 1] tel que $x=(1-t)a+tb$

4.1.2 On définit sur **N** deux suites réelles (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

(i) $a_0=a$ et $b_0=b$

(ii) pour tout entier *n* : $\begin{cases} \text{si } x\in\left[a_n\ ;\ \dfrac{a_n+b_n}{2}\right[,\ a_{n+1}=a_n \text{ et } b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2} \\ \text{sinon, } a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1}=b_n \end{cases}$

4.1.2.1 Algorithme

Entrée des variables
- $a\leftarrow ?$
- $b\leftarrow ?$
- $x\leftarrow ?$
- $n\leftarrow ?$

Boucle
Pour $i=1$ à n
début
$c=\dfrac{a+b}{2}$
Si $x<c$
alors $b\leftarrow c$
sinon $a\leftarrow c$
fin
Affichage de a et b

4.1.2.2 On peut remarquer qu'a chaque étape du procédé un des termes, a_{n+1} ou b_{n+1}, est égal à son prédécesseur et que l'autre est remplacé par le milieu de l'intervalle $\left[a_{n+1}\ ;\ b_{n+1}\right]$.

Démontrons dans un premier temps la proposition P_n : $a\leqslant a_n<b_n\leqslant b$ et $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$ Récurrence

Par hypothèse $a_0=a<b_0=b$ et $b_0-a_0=\dfrac{b-a}{2^0}$ donc P_0 est vraie

Supposons P_n vraie

1er cas : $x\in\left[a_n\ ;\ \dfrac{a_n+b_n}{2}\right[$

$a_{n+1}=a_n\in[a\ ;\ b]$

$$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a\leqslant a_n\leqslant b \\ a\leqslant b_n\leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow a\leqslant\frac{a_n+b_n}{2}\leqslant b \text{ et } b_{n+1}\in[a\ ;\ b]$$

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n=\frac{b_n-a_n}{2}$$

$$a_n<b_n \ \Rightarrow\ 0<b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2} \text{ et } a_{n+1}<b_{n+1}$$

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

2ème cas : $x\notin\left[a_n\ ;\ \frac{a_n+b_n}{2}\right[$

On démontre de même :

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\in[a\ ;\ b]$$

$$b_{n+1}=b_n\in[a\ ;\ b]$$

$$b_{n+1}-a_{n+1}=b_n-\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{b_n-a_n}{2}$$

D'après le 1er cas :

$$a_{n+1}<b_{n+1}$$

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Soit la propriété Q_n :

il existe $k_n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant k_n<2^n$, tel que $a_n=a+k_n\frac{b-a}{2^n}$

Démonstration par récurrence.

$a_0=a\in[a\ ;\ b]$ et $b_0=b\in[a\ ;\ b]$

$a_0=a=a+0\frac{b-a}{2}$

$0\leqslant k_0=0<2^0$ donc Q_0 est vraie

Supposons Q_n vraie :

1er cas :

$$a_{n+1}=a_n=a+k_n\frac{b-a}{2^n}=a+2k_n\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

En posant $k_{n+1}=2k_n$, $k_n\in\mathbb{N}$ donc $k_{n+1}\in\mathbb{N}$

$0\leqslant k_n<2^n \ \Rightarrow\ 0\leqslant k_{n+1}<2^{n+1}$ donc Q_{n+1} est vraie

2$^{\text{ème}}$ cas : $x \notin \left[a_n \;;\; \frac{a_n+b_n}{2} \right[$

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} = a_n + \frac{b_n-a_n}{2}$$

D'après Q_n : $a_n = a + k_n \frac{b-a}{2^n}$

D'après P_n : $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ donc $\frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

D'où $a_{n+1} = a + k_n \frac{b-a}{2^n} + \frac{b-a}{2^{n+1}} = a + (2k_n+1)\frac{(b-a)}{2^{n+1}}$

En posant $k_{n+1} = 2k_n + 1$, $k_n \in \mathbb{N}$ donc $k_{n+1} \in \mathbb{N}$

$0 \leqslant k_n < 2^n \Rightarrow 0 \leqslant k_n \leqslant 2^n - 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2k_n + 1 \leqslant 2(2^n-2)+1$

$0 \leqslant k_{n+1} < 2^{n+1}$ donc Q_{n+1} est vraie

Ecriture de b_n

D'après P_n : $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ et $b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$

D'après Q_n : $a_n = a + k_n \frac{b-a}{2^n}$

D'où $b_n = a + (k_n+1)\frac{b-a}{2^n}$

$k_n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k_n < 2^n$ donc $0 < k_n + 1 \leqslant 2^n$

4.2. Dans cette question, on considère une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 2, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

où α, β, γ sont trois nombres réels.
Soit Γ la représentation graphique de f dans un repère cartésien $(0 \;;\; \vec{i} \;;\; \vec{j})$ du plan.

4.2.1. Soit un réel *m* et un réel non nul *x*.

$$\frac{f(m+x)-f(m-x)}{2x} = \frac{\alpha(m+x)^2+\beta(m+x)+\gamma-\alpha(m-x)^2-\beta(m-x)-\gamma}{2x}$$

$$\frac{f(m+x)-f(m-x)}{2x} = \frac{\alpha m^2+2\alpha xm+\alpha x^2+\beta m+\beta x-\alpha m^2+2\alpha xm-\alpha x^2-\beta m+\beta x}{2x}$$

$$\frac{f(m+x)-f(m-x)}{2x} = \frac{4\alpha xm+2\beta x}{2x}$$

$$\frac{f(m+x)-f(m-x)}{2x} = 2\alpha xm+\beta$$

$$\frac{f(m+x)-f(m-x)}{2x} = f'(x) \quad [1]$$

4.2.2 Graphiquement.

$\dfrac{f(m+x)-f(m-x)}{2x}$ est le coefficient directeur de la sécante δ_m à la courbe Γ en $M_{-m}\begin{pmatrix} m-x \\ f(m-x) \end{pmatrix}$ et $M_m\begin{pmatrix} m+x \\ f(m+x) \end{pmatrix}$ et $f'(x)$ celui de la tangente τ_x au point d'abscisse x.

δ_m est parallèle à τ_x

4.3. *Dans cette question, on considère une fonction f définie et continue sur* $\mathbb{R}$ *, qui vérifie pour tous réels* λ *et* μ *la relation* :

$$\frac{f(\lambda)+f(\mu)}{2}=f\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) \quad [2]$$

On se propose de démontrer que cette dernière relation caractérise les fonctions affines

Soient deux réels a et b tels que a < b et un réel x de l'intervalle [a ; b]. On se place dans les conditions de la question préliminaire et on reprend les mêmes notations.

4.3.1. Soit P_n la proposition :

$$f(a_n)=\left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)f(a)+\frac{k_n}{2^n}f(b) \text{ et } f(b_n)=\left(1-\frac{k_n+1}{2^n}\right)f(a)+\frac{k_n+1}{2^n}f(b)$$

Récurrence sur *n*.

Initialisation.

$k_0=0$ donc $f(a_0)=\left(1-\dfrac{k_0}{2^0}\right)f(a)+\dfrac{k_0}{2^0}f(b)$ et P_0 est vraie.

Hérédité.

Supposons P_n vraie.

1[er] cas : $a_{n+1}=a_n$, $k_{n+1}=2k_n$ et $b_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$

$$f(a_{n+1})=f(a_n)=\left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)f(a)+\frac{k_n}{2^n}f(b)$$
$$f(a_{n+1})=\left(1-\frac{2k_n}{2^{n+1}}\right)f(a)+\frac{2k_n}{2^{n+1}}f(b)$$
$$f(a_{n+1})=\left(1-\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}\right)f(a)+\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}f(b)$$

$$f(b_{n+1})=f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=\frac{f(a_n)+f(b_n)}{2}$$
$$f(b_{n+1})=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)f(a)+\frac{k_n}{2^n}f(b)+\left(1-\frac{k_n+1}{2^n}\right)f(a)+\frac{k_n+1}{2^n}f(b)\right)$$
$$f(b_{n+1})=\frac{1}{2}\left(\left(2-\frac{2k_n+1}{2^n}\right)f(a)+\frac{2k_n+1}{2^n}f(b)\right)$$
$$f(b_{n+1})=\left(1-\frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)f(a)+\frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}f(b)$$

P_{n+1} vraie

2ème cas : $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, k_{n+1}=2k_n+1$ et $b_{n+1}=b_n$

f vérifie la relation [2] d'où :

$$f(a_{n+1})=f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=\frac{f(a_n)+f(b_n)}{2}$$

D'après le calcul de $f(b_n)$ du premier cas, en remplaçant b_n par a_n :

$$f(a_{n+1})=\frac{1}{2}\left(\left(2-\frac{2k_n+1}{2^n}\right)f(a)+\frac{2k_n+1}{2^n}f(b)\right)$$

$$f(a_{n+1})=\left(1-\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}\right)f(a)+\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}f(b)$$

$$f(b_{n+1})=f(b_n)=\left(1-\frac{k_n+1}{2^n}\right)f(a)+\frac{k_n+1}{2^n}f(b)$$

$$f(b_{n+1})=f(b_n)=\left(1-\frac{2k_n+1+1}{2^{n+1}}\right)f(a)+\frac{2k_n+1+1}{2^{n+1}}f(b)$$

$$f(b_{n+1})=f(b_n)=\left(1-\frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)f(a)+\frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}f(b)$$

P_{n+1} vraie

Conclusion

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est vraie

4.3.2 Soit *x* un réel l'intervalle $[a\,;b]$

Montrons que $x\in[a_n\ ;\ b_n]$

$x\in[a_0\ ;\ b_0]=[a\ ;\ b]$

Supposons $x\in[a_n\ ;\ b_n]$

si $x\in\left[a_n\ ;\ \frac{a_n+b_n}{2}\right[$, $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ donc $x\in[a_{n+1}\ ;\ b_{n+1}]$

sinon, $x\in\left[\frac{a_n+b_n}{2}\ ;\ b_n\right]$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$ donc $x\in[a_{n+1}\ ;\ b_{n+1}]$

Pour tout *n* entier naturel $x\in[a_n\ ;\ b_n]$

Montrons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

On a démontré que $a\leqslant a_n<b_n\leqslant b$ et $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$

Par définition : ou $a_{n+1}-a_n=a_n-a_n\geqslant 0$

ou $a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}-a_n=\dfrac{a_n-b_n}{2}\geqslant 0$

Donc (a_n) est croissante.

De même : ou $b_{n+1}-b_n=b_n-b_n\leqslant 0$

ou $b_{n+1}-b_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}-b_n=\dfrac{a_n-b_n}{2}\leqslant 0$

Donc (b_n) est décroissante.

$$\lim a_n-b_n=\lim\frac{b-a}{2^n}=0$$

Les suites sont donc convergentes vers *l*.

$$a_n\leqslant x\leqslant b_n$$
$$\lim a_n\leqslant x\leqslant \lim b_n$$
$$l\leqslant x\leqslant l$$

Donc $\lim a_n=\lim b_n=x$

$a_n=a+k_n\dfrac{b-a}{2^n}$ et $x=(1-t)a+tb$, (a_n) converge donc :

$$\lim\left(a+k_n\frac{b-a}{2^n}\right)=(1-t)a+tb$$
$$a+(b-a)\lim\left(\frac{k_n}{2^n}\right)=a+t(b-a)$$
$$\lim\left(\frac{k_n}{2^n}\right)=t$$

La fonction *f* est continue donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)=f(x)$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)f(a)+\frac{k_n}{2^n}f(b)\right)=f((1-t)a+tb)$$
$$f(a)\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)+f(b)\lim_{n\to+\infty}\frac{k_n}{2^n}=f((1-t)a+tb)$$
$$(1-t)f(a)+t\,f(b)=f((1-t)a+tb)$$

On a choisit *x* quelconque, pour tout $x\in[a\ ;\ b]$ il existe un unique $t\in[0\ ;\ 1]$ tel que $x=(1-t)a+tb$. Trivialement, pour tout $t\in[0\ ;\ 1]$ il existe un unique $x\in[a\ ;\ b]$ tel que $x=(1-t)a+tb$

Donc pour tout $t\in[0\ ;\ 1]$, $(1-t)f(a)+t\,f(b)=f((1-t)a+tb)$

Propriété 4 : Soit *f* une fonction numérique définie et continue sur **R**.
Si, pour tous réels λ et μ, $\dfrac{f(\lambda)+f(\mu)}{2}=f\left(\dfrac{\lambda+\mu}{2}\right)$ alors *f* est une fonction affine.

Démonstration.
f est continue sur $\mathbb{R}$ donc pour tout couple $(a\ ;\ b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et tout $t\in[0\ ;\ 1]$

$$(1-t)f(a)+t\,f(b)=f\left((1-t)a+t\,b\right)\quad [3]$$

Soit l'intervalle $I_n=[-n\ ;\ n]$, $n\in\mathbb{N}^*$

$$(1-t)f(-n)+t\,f(n)=f\left(-(1-t)n+t\,n\right)$$
$$t\left(f(n)-f(-n)\right)+f(-n)=f\left(-(1-t)n+t\,n\right)$$

$x\in I_n$ si et seulement s'il existe un $t\in[0\ ;\ 1]$ tel que $x=-(1-t)n+t\,n$

$$-1+t\,n+t\,n=x$$
$$n\neq 0 \text{ donc } t=\frac{x+1}{2n}$$

En remplaçant dans [3] :

$$\frac{x+1}{2n}\left(f(n)-f(-n)\right)+f(-n)=f(x)$$
$$\frac{f(n)-f(-n)}{2n}x+\frac{f(n)-f(-n)}{2n}+f(-n)=f(x)\quad [4]$$

Donc la fonction *f* est affine sur tout intervalle $I_n=[-n\ ;\ n]$, $n\in\mathbb{N}^*$

Si $p\in\mathbb{N}^*$ alors $x\in I_n$ implique $x\in I_{n+p}$ et :

$$\frac{f(n+p)-f(-n-p)}{2n-2p}x+\frac{f(n+p)-f(-n-p)}{2n}+f(-n-p)=f(x)\quad [5]$$

L'écriture d'un polynôme sous forme développée, réduite, ordonnée par ordre décroissant est unique donc quelque soit *n* et *p,* non nuls :

$$\frac{f(n+p)-f(-n-p)}{2n-2p}=\frac{f(n)-f(-n)}{2n}=p$$
$$\frac{f(n)-f(-n)}{2n}+f(-n)=\frac{f(n+p)-f(-n-p)}{2n}+f(-n-p)=q$$

Donc la fonction *f* est affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ C.Q.F.D.

4.3.3. Réciproquement.
Soit *f* une fonction affine : $f(x)=p\,x+q$

$$\frac{f(\lambda)+f(\mu)}{2}=\frac{p\lambda+q+p\mu+q}{2}=p\frac{\lambda+\mu}{2}+q=f\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)$$

$\dfrac{f(\lambda)+f(\mu)}{2}=f\left(\dfrac{\lambda+\mu}{2}\right)$ si et seulement si *f* est affine.

4.4. *Dans cette question, on considère une fonction f définie et dérivable sur* **R,** *qui vérifie pour tout réel m et tout réel non nul x la relation* [1] :

$$\frac{f(m+x)-f(m-x)}{2x}=f'(m) \quad [1]$$

On se propose de démontrer que cette relation caractérise les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

4.4.1. Si x est non nul, [1] implique $f(m+x)-f(m-x)=2x\,f'(m)$

Si x est nul : $f(m)-f(m)=0\,f'(m)$

Pour tout réels m et x, $f(m+x)-f(m-x)=2x\,f'(m)$

Si x est nul : $f'(m)=\frac{1}{2}(f'(m+x)+f'(m-x))$

Si x est non nul :

$$\frac{1}{2}(f'(m+x)+f'(m-x))=\frac{1}{2}\left(\frac{f(m+2x)-f(m)}{2x}+\frac{f(m)-f(m-2x)}{2x}\right)$$

$$\frac{1}{2}(f'(m+x)+f'(m-x))=\frac{1}{2}\left(\frac{f(m+2x)-f(m-2x)}{2x}\right)$$

$$\frac{1}{2}(f'(m+x)+f'(m-x))=\frac{1}{2}(2f'(m))$$

$$\frac{1}{2}(f'(m+x)+f'(m-x))=f'(m)$$

Pour tout réels m et x, $\frac{1}{2}(f'(m+x)+f'(m-x))=f'(m)$

4.4.2. *Propriété 5* : Soit f une fonction définie et dérivable sur **R**.

Si, pour tout réel m et tout réel non nul x, $\frac{f(m+x)-f(m-x)}{2x}=f'(m)$, alors f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Démonstration.

Soit deux réels λ et μ, on pose $m=\frac{1}{2}(\lambda+\mu)$ et $x=\frac{1}{2}(\lambda-\mu)$

$m+x=\lambda$ et $m-x=\mu$

f vérifie la propriété [1] donc pour tout réel m et x, $f'(m)=\frac{1}{2}(f'(m+x)+f'(m-x))$

donc pour tout réel λ et μ,

$$f'\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)=\frac{(f'(\lambda)+f'(\mu))}{2}$$

Donc f' est une fonction affine.

Toute primitive de f' est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Réciproquement.

Soit f une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

D'après le 4.2.1 $\frac{f(m+x)-f(m-x)}{2x}=f'(x)$ C.Q.F.D.