Planche 1. Dérivabilité.
Corrigé.

Une petite remarque sur l'énoncé. J'aurais écrit : « Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point considéré :

a_ f définie par $f(x)=\sqrt{x}$. b_ ...

Je pinaille peut-être, mais c'est pour éviter une confusion courante entre f et $f(x)$.
f est une fonction, $f(x)$ est un nombre (c'est l'image de x).

1_a Dérivabilité en 0 de la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x}$

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc on étudie la limite en 0 de $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ sur $]0\ ;\ a[$, $a>0$.

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h}=0\\ \lim\limits_{h\to 0}h=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h} \text{ est une forme indéterminée.}$$

On change la forme.

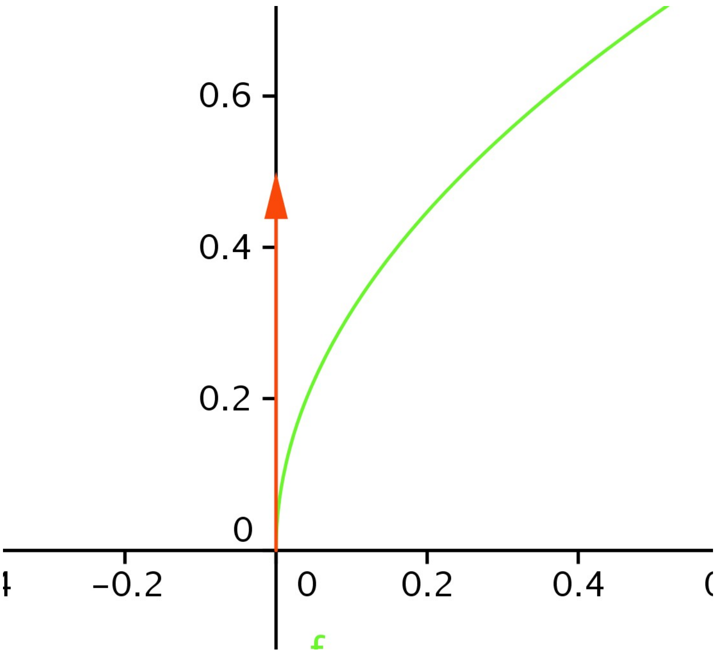
$h\in]0\,;a[$, $a>0$, donc $h>0$ et

$h=\sqrt{h}^{\,2}$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}^{\,2}}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty.$$

La fonction f n'est pas dérivable en 0 mais la représentation graphique de f admet une demi-tangente verticale en 0.



Ce graphique a été réalisé avec GeoGebra, libre et gratuit.

1_b Dérivabilité en -2 de la fonction *f* définie par : $g(x)=|x+2|$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ donc on étudie la limite en 0 de $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$ sur

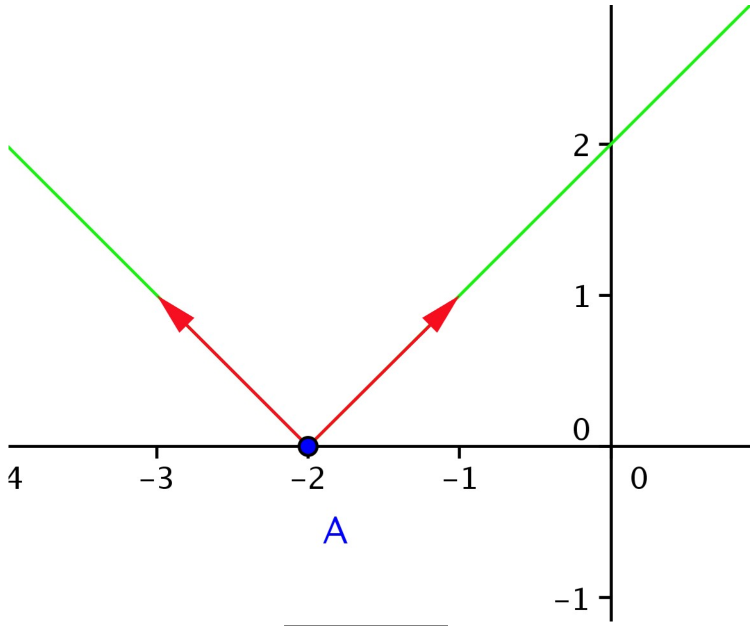
$]-a\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ a[,\ a>0.$

$\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$

Pour $h>0$, $\dfrac{f(-\text{٢}+h)-f(-\text{٢})}{h}=\dfrac{h}{h}=\text{١}$ et $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=1$

Pour $h<0$, $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\dfrac{-h}{h}=-1$ et $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=-1$

h n'est pas dérivable en -2 mais elle est dérivable à droite et à gauche. Sa courbe admet une demi-tangente à droite et une demi tangente à gauche en -2.
A est un point anguleux.



1_c Dérivabilité en -1 de la fonction *h* définie par : $h(x)=\sqrt{-x^{\text{٢}}+\text{٣}x+\text{۴}}$

$-x^{\text{٢}}+\text{٣}x+\text{۴}=-(x+\text{١})(x-\text{۴})$ donc $D_h=[-1\ ;\ 4[$

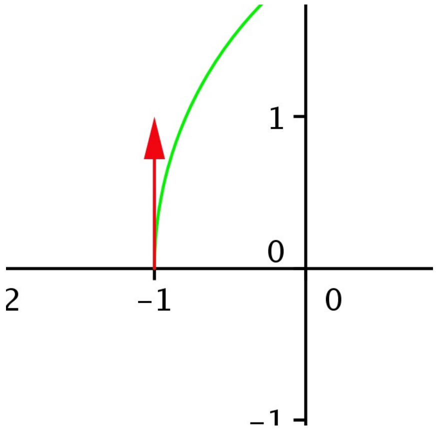
On étudie la limite en 0 de $\dfrac{h(-1+t)-h(-1)}{t}$ sur $]0\ ;\ a[,\ 0<a<5.$ (j'ai choisi *t* comme variable, *h* étant la fonction ne peut être la variable)

$0<t<5$ donc $t=\sqrt{t}^{\,2}$, $-(t-5)>0$ et $\dfrac{h(-1+t)-h(-1)}{t}=\dfrac{\sqrt{-t(t-3)}}{\sqrt{t}^{\,2}}=\dfrac{\sqrt{-(t-5)}}{\sqrt{t}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 0}\sqrt{-(t-5)}=5\\ \lim\limits_{t\to 0}\sqrt{t}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h(-1+t)-h(-1)}{t}=+\infty$$

La fonction h n'est pas dérivable en -1 mais la représentation graphique de h admet une demi-tangente verticale en -1.

Remarque. Cette courbe est le demi-cercle supérieur de centre $O(0\ ;\ 2)$ et de rayon $r = 3$.



1_d Dérivabilité en 0 de la fonction *i* définie par : $i(x)=\sqrt{x^3+2x^2}$

$x^3+2x^2=x^2(x+2)$ **donc** $D_i=[-2\ ;\ +\infty[$

On étudie la limite en 0 de $\dfrac{i(h)-i(0)}{h}$ sur $]-a\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ a[,\ 0<a<2$.

$$\frac{i(h)-i(0)}{h}=\frac{\sqrt{h^3+2h^2}}{h}=\frac{\sqrt{h^2(h+2)}}{h}=\frac{\sqrt{h^2}\sqrt{h+2}}{h}=\frac{|h|\sqrt{h+2}}{h}$$

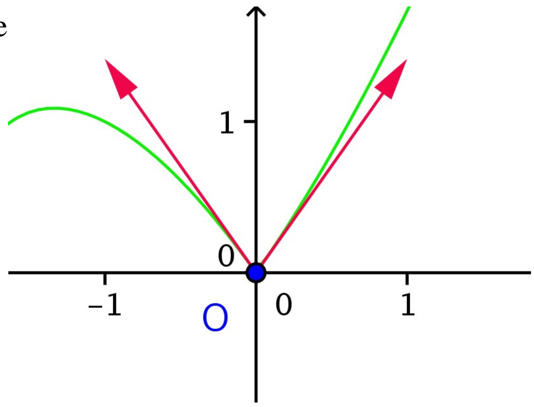
Pour $h<0$, $|h|=-h$ et $\dfrac{i(h)-i(0)}{h}=\dfrac{-h\sqrt{h+2}}{h}=-\sqrt{h+2}$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{i(h)-i(0)}{h}=-\sqrt{2}$$

Pour $h>0$, $|h|=h$ et $\dfrac{i(h)-i(0)}{h}=\dfrac{h\sqrt{h+2}}{h}=\sqrt{h+2}$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{i(h)-i(0)}{h}=\sqrt{2}$$

La fonction i n'est pas dérivable en 0 mais elle est dérivable à droite et à gauche. Sa courbe admet une demi-tangente à droite et une demi tangente à gauche en 0.
O est un point anguleux.



1_e Dérivabilité en 0 de la fonction *j* définie par : $j(x)=x|x|$

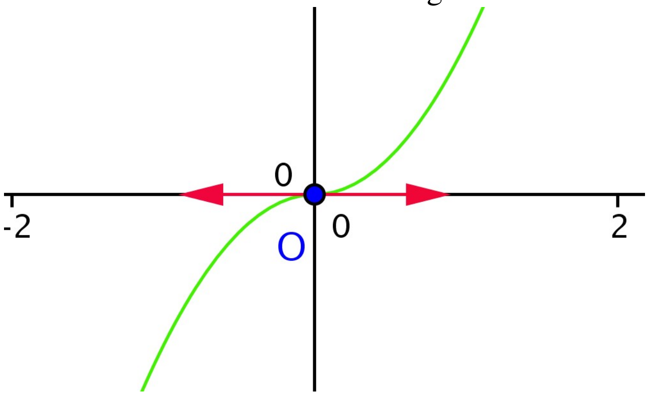
La fonction *j* est définie sur $\mathbb{R}$ donc on étudie la limite en 0 de $\dfrac{j(h)-j(0)}{h}$ sur

$]-a\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ a[,\ a>0.$

$$\frac{j(h)-j(0)}{h}=\frac{h|h|}{h}=|h|$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{j(h)-j(0)}{h}=0$$

La fonction *j* est dérivable en 0 et sa courbe admet une tangente horizontale en *O*(0 ; 0).



1_f Dérivabilité en 0 de la fonction *k* définie par : $k(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

La fonction *k* est définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

k n'est pas définie en zéro. Une étude de la dérivabilité en ce point est absurde.

On peut remarquer que la fonction n'a pas de limite en 0 et qu'on ne peut pas la prolonger par continuité en 0.