Exercices sur les limites et les asymptotes.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1}$$

Etude de la limite en $+\infty$ et $-\infty$ en fonction des valeurs de *a* et *b*.

On note *f* la fonction étudiée.

1_ Cas particuliers.

a_ a=0 et b=0. $f(x)=\dfrac{x-1}{x-1}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

b_ *a=0 et b* non nul.

Les limites sont des formes indéterminées donc il faut changer la forme.

A l'infini, on factorise par le terme dominant (le plus haut degré pour les polynômes).

$$f(x)=\frac{bx^2+x-1}{x-1}=\frac{x^2\left(b+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{x\left(b+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{1-\dfrac{1}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} b=b$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$ donc pour $b>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $b<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1$

De même :

pour $b>0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $b<0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

On peut aussi appliquer le théorème du terme dominant.

Un polynôme à la même limite à l'infini que son terme dominant.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \frac{bx^2+x-1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty} \frac{b\,x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} b\,x$$

2_ Cas général.

$$\frac{ax^3+bx^2+x-1}{x-1}=\frac{x^3(a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x(1-\frac{1}{x})}=\frac{x^2(a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{1-\frac{1}{x}}$$

Pour $a > 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Pour $a < 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

On peut aussi rechercher les asymptotes.

L'étude systématique d'une asymptote à l'infini ce fait en étudiant

- premièrement la limite de $\frac{f(x)}{x}$
- deuxièmement si la limite de $\frac{f(x)}{x}$ est finie égale à a, en étudiant la limite de

  $f(x)-ax$

Les différents cas :

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\infty$ la courbe admet une branche parabolique (une parabole peut être asymptote comme pour la fonction carré mais pas obligatoirement)

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=\infty$ la courbe admet une direction asymptotique mais pas d'asymptote (exemple la logarithme admet pour direction asymptotique l'axe *Ox*)

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b$ alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote à l'infini.

Pour une fonction rationnelle, on peut changer l'écriture :

f = polynôme + fonction rationnelle

Recherche des asymptotes.

1_ Cas particuliers.

a_ a=0 et b=0.

$f(x)=1$ donc la courbe représentative est une droite horizontale.

b_ $a=0$ *et* b non nul.

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{bx^2+x-1}{x(x-1)}=\frac{x^2\left(b+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{b+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=b$ donc la courbe admet une direction asymptotique.

$$f(x)-bx=\frac{bx^2+x-1}{x-1}-bx=\frac{bx^2+x-1-bx(x-1)}{x-1}=\frac{(b+1)x-1}{x-1}$$

$$f(x)-bx=\frac{(b+1)x-1}{x-1}=\frac{x\left(b+1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{b+1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-bx=b+1$ donc la droite d'équation $y = b\,x + b + 1$ est une asymptote en plus l'infini.

De même, la droite d'équation $y = b\,x + b + 1$ est une asymptote en moins l'infini.

La deuxième méthode qui sert aussi à trouver les limites.

On transforme l'écriture de la fonction rationnelle. On traite un seul cas, a et b peuvent être nuls, le calcul est le même.

$f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+x-1}{x-1}$ peut s'écrire sous la forme $\alpha x^2+\beta x+\gamma+\dfrac{\delta}{x-1}$

(Oublions que a peut être nul, le numérateur est du troisième degré et le numérateur du premier donc f est la somme d'un polynôme du second degré (3 – 1) et d'une fonction rationnelle telle que le degré du numérateur soit inférieur de un à celui du dénominateur. Pour justifier ce résultat, il faut étudier la division euclidienne dans l'ensemble des polynômes).

On réduisant au même dénominateur et en identifiant les numérateur on obtient l'identité :

$ax^3+bx^2+x-1=\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)(x-1)+\delta$ (on reconnaît ici la division euclidienne)

$ax^3+bx^2+x-1=\alpha x^3+(\beta-\alpha)x^2+(\gamma-\beta)x+\delta-\gamma$

L'écriture d'un polynôme sous la forme développée, réduite et ordonnée par ordre décroissant est unique donc les coefficients des termes de même degré sont égaux. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases}\alpha=a\\ \beta-\alpha=b\\ \gamma-\beta=1\\ \delta-\gamma=-1\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\alpha=a\\ \beta=a+b\\ \gamma=1+a+b\\ \delta=a+b\end{cases}$$

Exercices sur les limites et les asymptotes.

$$f(x)=ax^2+(a+b)x+(1+a+b)+\frac{a+b}{x-1}$$

On retrouve les résultats sur les limites (par abus d'«écriture » j'écris ∞ pour désigner ou $+\infty$ ou $-\infty$, cette notation est fortement déconseillé au Capes et devant les élèves).

Pour toute valeur de a et b $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+b}{x-1}=0$

Si $a = b = 0$ alors $f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

Si $a = 0$ et b non nul, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} bx$

Si a est non nul, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} ax^2$

Quant aux asymptotes :

Si $a = b = 0$ alors $f(x) = 1$

Si $a = 0$ et b non nul, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(bx+1+b)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x-1}=0$ donc la droite d'équation $y = b\,x + b + 1$ est une asymptote en moins l'infini et en plus l'infini.

Si a est non nul, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax^2+(a+b)x+1+a+b)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x-1}=0$ donc la parabole d'équation $y=ax^2+(a+b)x+1+a+b$ est une asymptote en moins l'infini et en plus l'infini.