Le sujet.

Γ est un cercle rayon 4 et de centre O.
A est un point fixé du cercle.
M est un point du cercle différent de A.
f est la fonction qui à tout point M fait correspondre le point N tel que :

$$N \in (AM)$$

$$AN = \frac{16}{AM}$$

Déterminer le lieu des points N quand M décrit le cercle privé du point A.

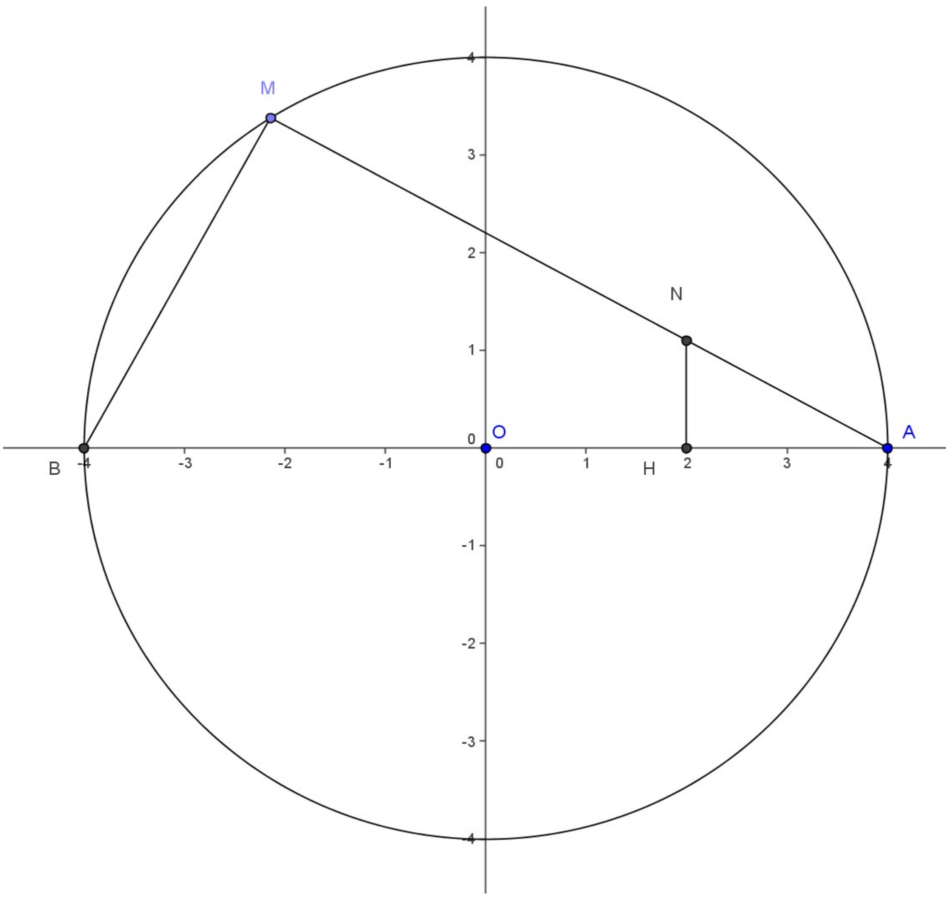
La conjecture.

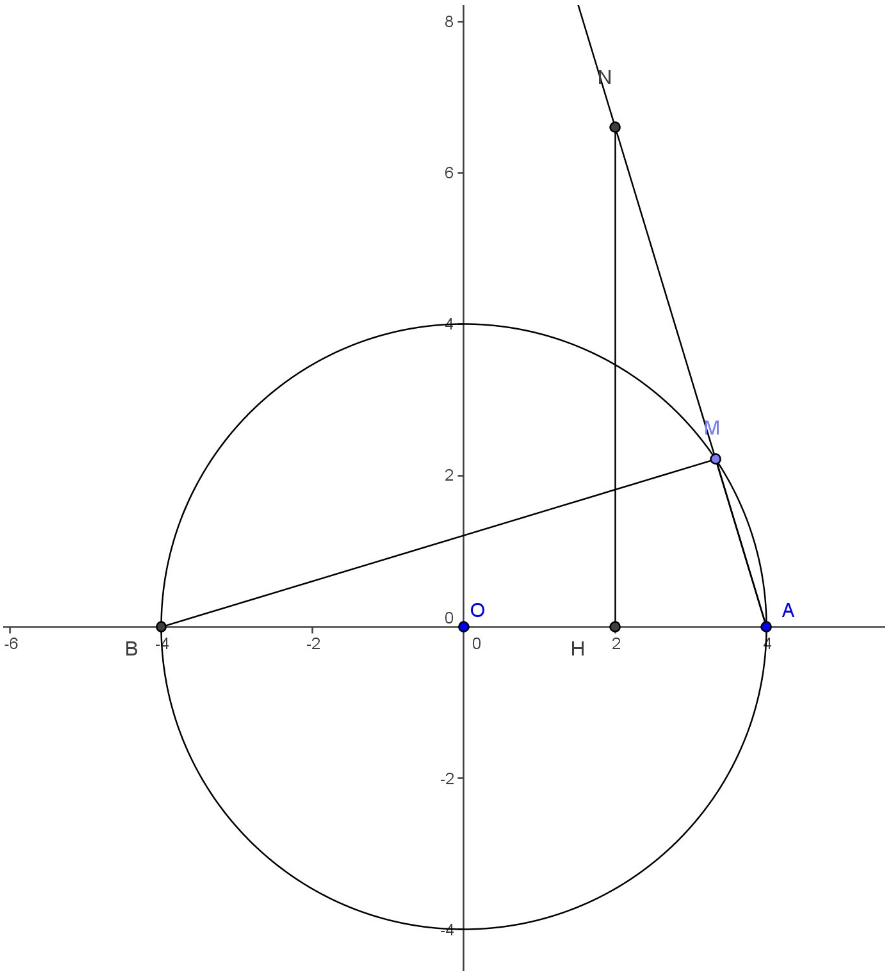
Il y a deux points N !!!!
Le problème est donc mal posé.
On choisit le point N de la demi-droite [AM) pour la conjecture et la démonstration.
La démonstration pour l'autre point est la même.

Le lieu des points N est la droite perpendiculaire au diamètre [AB] passant par le point H du diamètre vérifiant $AH = 2$.

Si on a choisit A de coordonnées (4 ; 0), le lieu est la droite d'équation $x = 2$.

La démonstration.





Condition nécessaire.

Le triangle ABM est inscrit dans le cercle Γ dont $[AB]$ est un diamètre, donc ABM est rectangle en M.
H est le projeté orthogonal de N sur le diamètre $[AB]$ donc AHN est rectangle en H.
Ces deux triangles rectangles ont un angle commun, $\widehat{A}$, donc il sont semblables.

$$\begin{matrix} M \to H \\ B \to N \\ A \to A \end{matrix} \quad \text{donc} \quad \frac{AH}{AN}=\frac{AM}{AB} \quad \text{et} \quad AH=AN\frac{AM}{AB}$$

Par hypothèse, $AN=\dfrac{16}{AM}$ et $AB=8$ donc $AH=\dfrac{16}{AM}\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{16}{8}=2$

Donc N appartient à la droite d, perpendiculaire au diamètre $[AB]$ passant par le point H du diamètre vérifiant $AH = 2$.

Condition suffisante.

Soit N un point de d. M est le point d'intersection de la demi-droite $[AN]$ et du cercle.
De même, les deux triangles ABM et AHN sont semblables.

$\dfrac{AH}{AN}=\dfrac{AM}{AB}$ et $AN=AB\dfrac{AH}{AM}$

Par hypothèse, $AB=8$ et $AH=2$ donc $AN=\frac{16}{AM}$

Donc tout point de *d* est l'image d'un point *M* du cercle privé de *A*.

Conclusion.

Le lieu des points *N* est la droite perpendiculaire au diamètre [*AB*] passant par le point *H* du diamètre vérifiant *AH* = 2.