Tangentes à une parabole

Hypothèses

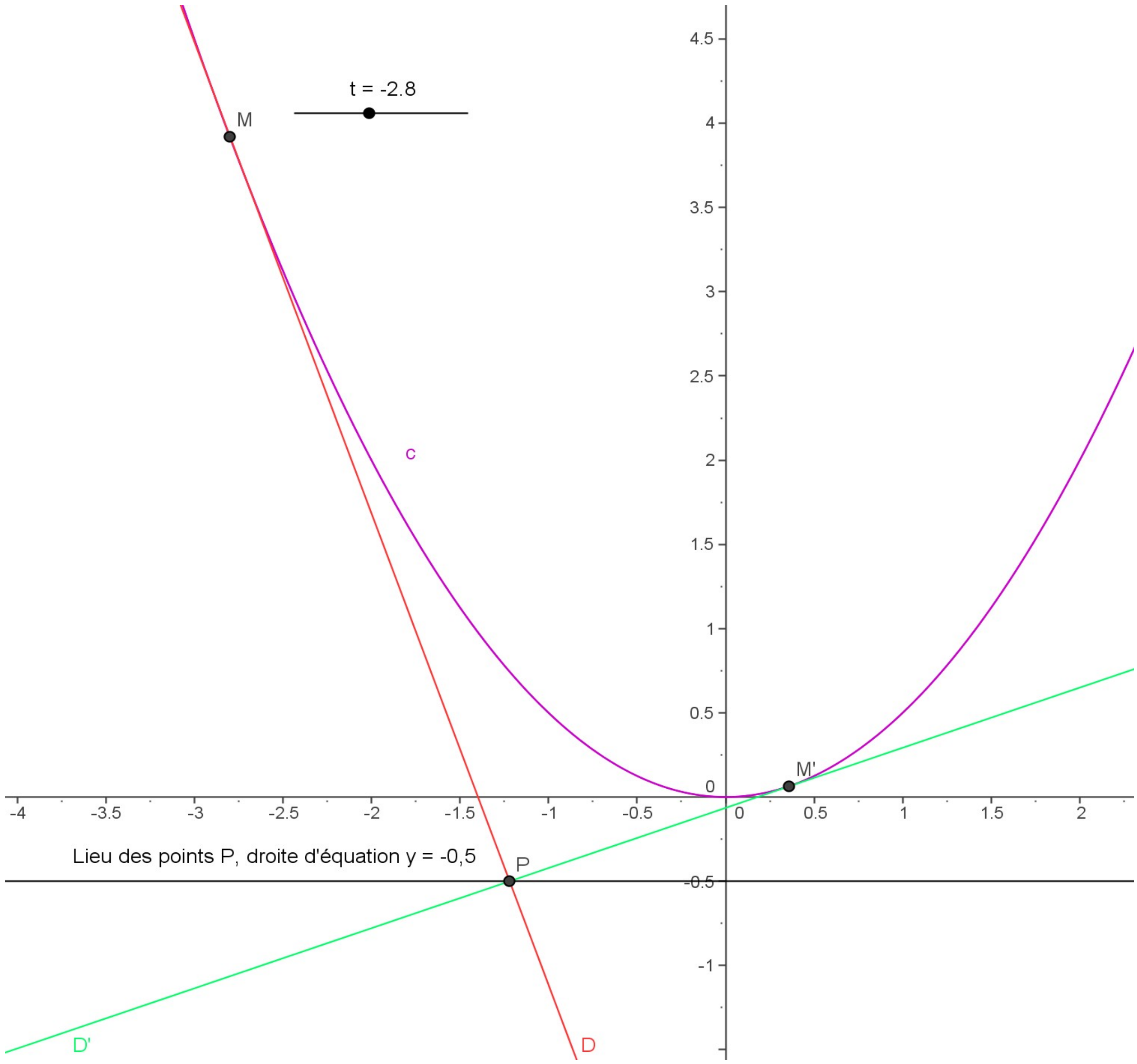
La parabole C a pour équation : $y=\frac{1}{x^2}$

t est une variable réelle non nulle (t est un paramètre en mathématiques, on traite t comme une constante, mais t varie)

D est la tangente à C au point M d'abscisse t, D' est la tangente à C au point M' d'abscisse $t'=-\frac{1}{t}$ et P est le point d'intersection de D et D'.

Conjecture

Le lieu des points P quand t parcourt $\mathbb{R}^*$ est la droite d'équation $y=-0{,}5$



Démonstration

Soit *f* la fonction dont la courbe est *C*, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

D est la tangente à *C* au point *M* d'abscisse *t* donc son équation est :

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

$$f'(x)=x \quad \text{donc} \quad y=t(x-t)+\frac{1}{2}t^2$$

$$y=tx-\frac{1}{2}t^2$$

D' est la tangente à *C* au point *M'* d'abscisse $t'=-\frac{1}{t}$ donc son équation est :

$$y=f'(t')(x-t')+f(t')$$

$$f'(x)=x \quad \text{donc} \quad y=-\frac{1}{t}(x+\frac{1}{t})+\frac{1}{2t^2}$$

$$y=-\frac{1}{t}x-\frac{1}{2t^2}$$

P est le point d'intersection de D et D' donc ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} y=tx-\frac{1}{2}t^2 & L_1 \\ y=-\frac{1}{t}x-\frac{1}{2t^2} & L_2 \end{cases}$$

On veut démontrer que y = - 0,5, donc on élimine *x*.

On utilise la méthode de combinaisons linéaires pour éliminer *x* :

$$\begin{cases} \frac{1}{t}y=x-\frac{1}{2}t & \leftarrow \frac{1}{t}L_1 \\ t\,y=-x-\frac{1}{2t} & \leftarrow t\,L_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{t}y+t\,y=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2t} \qquad \leftarrow \frac{1}{t}L_1+t\,L_2$$

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)y=-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$y=-\frac{1}{2}$$

C.Q.F.D.

Conclusion

Le point *P* appartient à la droite δ d'équation $y=-0,5$

Remarque

Il faudrait démontrer la réciproque, tout point de δ est le point d'intersection de D et D' pour un certain *t*, pour conclure que la δ est le lieu des points *P*.