Marronnier, tridi, 23 germinal, an CCXV

Combien y a-t-il de mains?

On appelle main un ensemble de cinq cartes parmi les 52 du jeu.

1_ Nombre de carrés d'as.
Il n'y a qu'une possibilité pour le choix des as. Il reste à choisir la « cinquième » carte parmi les 48 restantes. Donc il y a 48 mains qui sont des carrés d'as.

2_ Nombre de carrés.
Il y a 13 hauteurs de cartes, de l'as au roi. Donc il y a 13 choix pour le carré.
Il y a autant de mains qui sont des carrés d'as, que mains qui sont des carrés d'une autre hauteur.
Donc il y a $48\times13=624$ mains qui sont des carrés.

3_ Nombre de quintes flush royales.
Il y a une seule quinte flush royale par couleur et quatre couleurs. Donc il y a 4 quintes flush royales.

4_ Nombre de quintes flush.
La carte la plus basse d'une quinte va de l'as, {as, 2, 3, 4, 5}, au dix, {10, valet, roi, dame, as}. Donc il y a 10 hauteurs de quintes flush. Il y a autant de quintes flush royales que de quintes flush d'une autre hauteur. Donc il y a $4\times13=52$ quintes flush.

5_ Nombre de couleurs.
On choisit une couleur, 4 choix.

Dans cette couleur, on choisit 5 hauteurs différentes parmi les 13, sans tenir compte de l'ordre.
Si je tiens compte de l'ordre, j'ai 13 choix pour la première, 12 pour la deuxième, 11 pour la troisième, 10 pour la quatrième et 9 pour la dernière, donc $13\times12\times11\times10\times9$ quintuplets.

Combien de fois ai-je compté $\{1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;5\}$, par exemple ?
Autrement dit, de combien de façon peut-on ranger ces 5 nombres ?
J'ai 5 choix pour le premier, 4 pour le deuxième, 3 pour le troisième, 2 pour le quatrième et 1 pour le dernier, donc $5\times4\times3\times2\times1$ ordres différents.
Je compte $5\times4\times3\times2\times1$ fois l'ensemble $\{1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;5\}$.
Je compte $5\times4\times3\times2\times1$ tout autre ensemble de hauteurs différentes.

Donc il y a $\frac{13\times12\times11\times10\times9}{5\times4\times3\times2\times1}$ choix pour les hauteurs et $4\times\frac{13\times12\times11\times10\times9}{5\times4\times3\times2\times1}$ couleurs.
On a compté les quintes flush.
Donc il y a $4\times\frac{13\times12\times11\times10\times9}{5\times4\times3\times2\times1}-40=5108$
(Ce raisonnement avait été expliqué en classe).

6_ Nombre de quintes.
On a vu qu'il y avait 10 hauteurs différentes pour une quinte.
Pour une hauteur, il y a 4 choix de couleur pour chacune des 5 cartes donc 4^5 choix.
Donc il y a 10×4^5 quintes.
On a compté les quintes flush.
Donc il y a $10\times4^5-40=10\,200$ quintes (sans les flush).

7_ Nombre de fulls.

On choisit une hauteur parmi 13 pour le brelan.
On choisit 3 cartes parmi les quatre de cette hauteur, donc on en laisse une et il y a 4 choix.
Il y a donc 13×4 choix de brelans.
On choisit une hauteur parmi les 12 restantes pour la paire.
On choisit 2 cartes parmi les quatre de cette hauteur.
Si on compte le nombre de couples. On choisit une carte parmi 4, puis une parmi 3.
Il y a deux couples pour une paire. Donc $\frac{3\times4}{2}$ paires par hauteur.
Donc, il y a $13\times4\times12\times6=3\,744$ fulls.

8_ Nombre de brelans.

On a vu qu'il y a 13×4 choix de brelans.
Il faut compléter la main avec deux cartes.
Si on compte le nombre de couples. On choisit la première dans une hauteur différente du brelan, donc parmi 48 cartes.
On choisit la deuxième parmi les 11 hauteurs restantes (pas de full), donc parmi 40.
Il y a deux couples pour une paire. Donc $\frac{48\times44}{2}$ choix pour les deux cartes restantes.
Donc, il y a $13\times4\times\frac{48\times44}{2}=54\,912$ brelans.

9_ Nombre de doubles paires.

On choisit 2 hauteurs différentes parmi 13 pour les paires.
Il y a 13 choix pour la première et 12 pour la deuxième, donc 13×12 couples de hauteurs et par conséquent $\frac{13\times12}{2}$ paires de hauteurs.
On a vu qu'il y avait 6 paires par hauteur, donc 6 choix pour la « première » et 6 pour la « deuxième ».
Il y a donc $\frac{13\times12}{2}\times6^2$ choix pour les paires.
Il reste à choisir une carte parmi les 11 hauteurs restantes, donc parmi 44 cartes.
Donc, il y a b $\frac{13\times12}{2}\times6^2\times44=123\,552$ doubles paires.

10_ Nombre de paires.

Il y a 6 paires par hauteur et treize hauteurs, donc 13×6 choix pour la paire.
Il reste à choisir 3 cartes.
On choisit 3 hauteurs parmi les 12 restantes.
Il y a $12\times11\times10$ choix ordonnés.
A chaque ensemble de trois éléments correspond $3\times2\times1$ triplets donc on a compté 6 fois chaque possibilité et il y a $\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}$ choix pour les hauteurs.
Dans chaque hauteur on choisit une carte parmi les quatre couleurs donc il y a 4^3 choix.
Il y a donc $13\times6\times\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}\times4^3=1\,098\,240$

11_ Nombre de mains différentes.

On compte le nombre de mains ordonnées (quintuplets ou 5-listes).
Il y a 52 choix pour la première carte, 51 pour la deuxième, 50 pour la troisième, 49 pour la quatrième et 48 pour la dernière, soit $52\times51\times50\times49\times48$ mains ordonnées.
On compte le nombre de façon d'ordonner les cartes d'une main, cinq cartes non ordonnés.
Il y a 5 choix pour la première carte, 4 pour la deuxième, 3 pour la troisième, 2 pour la quatrième et 1 pour la dernière, soit $5\times4\times3\times2\times1$ rangement, et dans le calcul précédent, chaque main a été comptée $5\times4\times3\times2\times1$ fois.
Donc il y a $\dfrac{52\times51\times50\times49\times48}{5\times4\times3\times2\times1}=2\,598\,960$ mains différentes.

12_ Probabilité d'avoir une quinte flush.

Il y a 40 quintes flush et 2 598 960 mains donc la probabilité d'avoir une quinte flush est égale à :

$$\frac{40}{2\ 598\ 960}\simeq1,54\times10^{-5}.$$