Ver à soie, quintidi, 15 floréal, an CCXVI

Probabilités et suites

Durée : deux heures.

Exercice n° 1

Une urne contient 6 boules dont trois rouges, R_1, R_2 et R_3, deux vertes, V_1 et V_2, et une blanche *B*.

1_ On tire l'une après l'autre deux boules donc l'ordre compte et sans remise donc il n'y a pas de répétition.

L'univers Ω est le tableau ci-dessous privé de la première diagonale (cases en noir).

	R_1	R_2	R_3	V_1	V_2	B
R_1	■	A	A	B	B	B et D
R_2	A	■	A	B	B	B et D
R_3	A	A	■	B	B	B et D
V_1	B	B	B	■		B et D
V_2	B	B	B		■	B et D
B	B et D	B et D	B et D	B et D	B et D	■

Il y a donc 30 résultats possibles.

2_ Les tirages sont équiprobables donc on applique la formule de l'équiprobabilité :

$$p(E)=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}=\frac{Card(E)}{Card(\Omega)}$$

a_ *A* est l'évènement : « les deux boules sont rouges ». Les cas favorables sont notés *A* dans le tableau . Il y a 6 cas favorables donc $\boxed{p(A)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}}$

b_ *B* est l'évènement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ». Les cas favorables sont notés *B* dans le tableau . Il y a 22 cas favorables donc $\boxed{p(B)=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}}$

c_ *D* est l'évènement : « la boule blanche est tirée ». Les cas favorables sont notés *D* dans le tableau . Il y a 10 cas favorables donc $\boxed{p(D)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}}$

3_ Les boules rouges portent le nombre 1, les vertes le nombre 2 et la blanche le nombre 3. S est la somme des nombres inscrits sur les 2 boules tirées.

Tableau de la valeur de S pour chaque résultat.

	R_1	R_2	R_3	V_1	V_2	B
R_1		2	2	3	3	4
R_2	2		2	3	3	4
R_3	2	2		3	3	4
V_1	3	3	3		4	5
V_2	3	3	3	4		5
B	4	4	4	5	5	

a_ S prend les valeurs 2, 3, 4 et 5. Sa loi de probabilité est :

S_i	2	3	4	5	total
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

b_ On peut calculer l'espérance mathématique et l'écart type dans un tableau ou à la calculatrice.

S_i	2	3	4	5	total
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	1
$p_i S_i$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
S_i^2	4	9	16	25	
$p_i S_i^2$	$\frac{4}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{64}{15}$	$\frac{10}{3}$	12

$$\boxed{E(S)=\frac{10}{3}}$$

$$V(S)=12-\left(E(S)\right)^2=\frac{12\times 9-100}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\boxed{\sigma=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

Exercice n° 2

Univers.

On lance 6 fois de suite une pièce de monnaie donc l'ordre compte et il y a répétition.

Un résultat est une 6-liste $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ où chaque x_i peut prendre la valeur P ou F.

$\Omega = \{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6,\ x_i \in \{P,\ F\}\}$

Il y a deux choix pour chaque x_i donc il y a 2^6 résultats possibles. $\boxed{card\,(\Omega) = 2^6}$

Dénombrement de A.

Soit A l'évènement : « on obtient exactement 3 piles ».

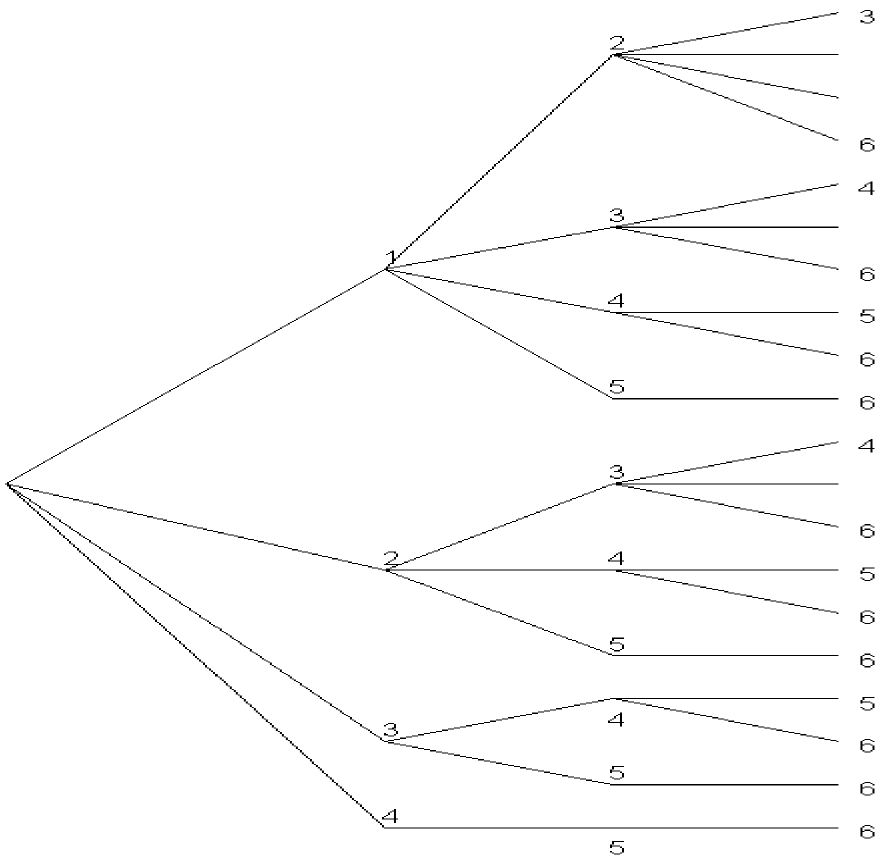
Première méthode.

Un élément de A est complètement défini par l'emplacement des trois piles dans la 6-liste.

On doit choisir 3 rangs parmi 6. On construit un arbre indiquant le rang du premier pile apparu, puis celui du deuxième, puis celui du troisième.

Arbre indiquant le rang des trois piles.

Rang du *Premier P* *Deuxième P* *Troisième P*

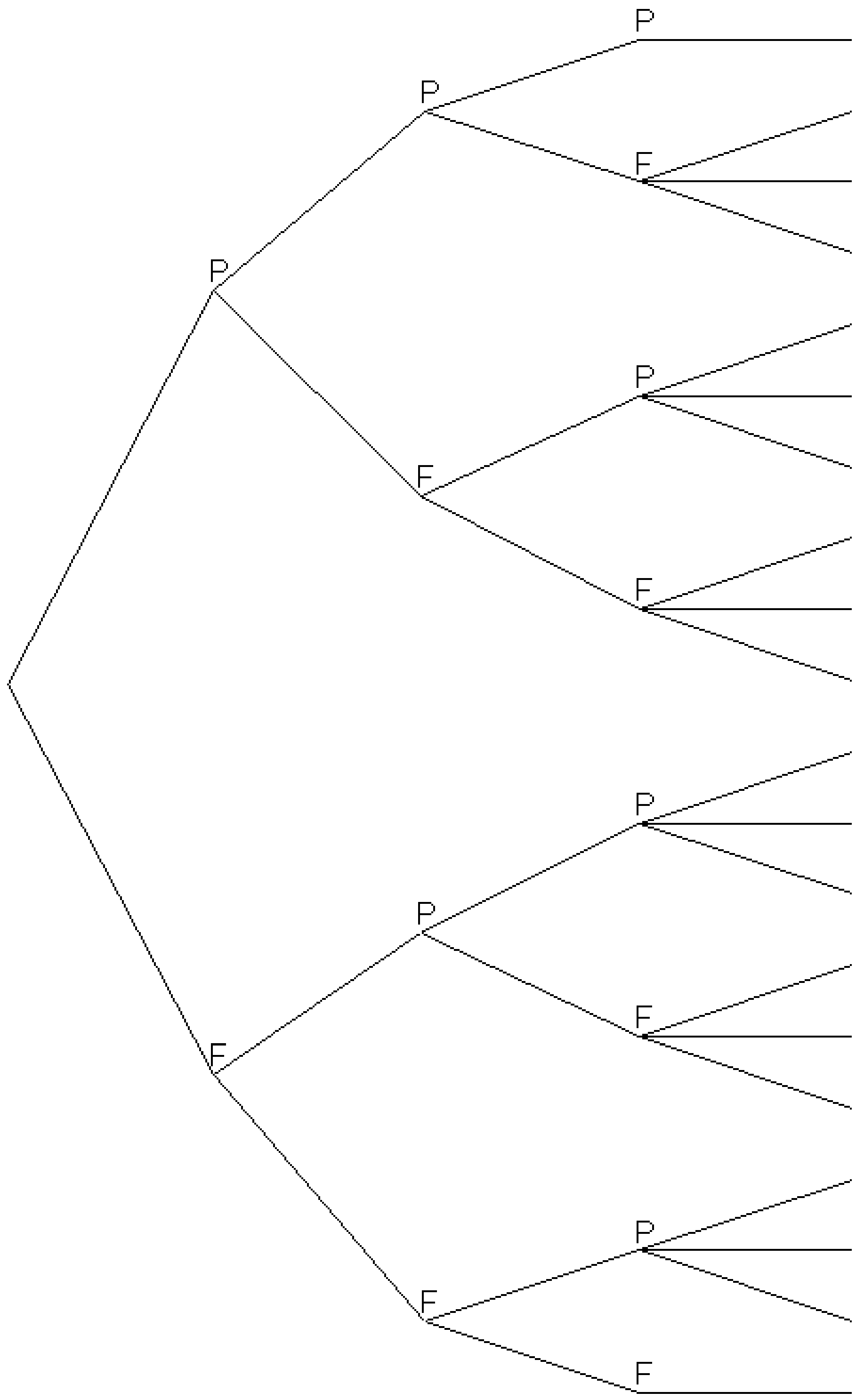


Il y a donc 20 6-listes avec trois piles exactement.

$\boxed{p(A) = \frac{20}{64} = \frac{5}{12}}$

Deuxième méthode.

On construit l'arbre des 6-listes correspondant aux résultats comportant exactement 3 piles.



On complète avec FFF

Il reste à placer un P parmi 3 places donc il y a 3 choix.

Il reste à placer un P parmi 3 places donc il y a 3 choix.

Il reste à placer deux P parmi 3 places donc un F parmi 3 et il y a 3 choix.

Il reste à placer un P parmi 3 places donc il y a 3 choix.

Il reste à placer deux P parmi 3 places donc un F parmi 3 et il y a 3 choix.

Il reste à placer deux P parmi 3 places donc un F parmi 3 et il y a 3 choix.

On complète avec PPP

Il y a donc 20 6-listes avec trois piles exactement.

$$\boxed{p(A)=\frac{20}{64}=\frac{5}{12}}$$

Troisième méthode.

Un élément de A est complètement défini par l'emplacement des trois piles dans la 6-liste.

On doit choisir 3 rangs parmi 6. L'ordre ne compte pas et il n'y a pas de répétition pour le choix des rangs.

On va déjà compter le nombre de 3-listes ordonnées de 3 rangs parmi 6. L'ordre compte et il n'y a pas de répétition pour le choix des rangs.

Il y a 6 choix pour le premier, 5 pour le deuxième et 4 pour le dernier et donc $6\times5\times4$ 3-listes ordonnées.

On compte le nombre de 3-listes ordonnées que l'on peut construire avec un ensemble de 3 rangs (non ordonnés) distincts (pas de répétition) $\{a, b, c\}$

Il y a 3 rangs possibles pour a, 2 pour b et 1 pour c donc $3\times2\times1$ 3-listes ordonnées.

Pour chaque ensemble de 3 rangs, il y a 6 3-listes ordonnées.

Il y a $6\times5\times4$ 3-listes ordonnées et donc $\frac{6\times5\times4}{6}=20$ ensembles de 3 rangs.

Donc A a 20 éléments.

$\boxed{p(A)=\frac{20}{64}=\frac{5}{12}}$

Exercice n° 3

1_ (u_n) est définie par $u_n=n^2$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty}$

2_ (v_n) définie par $v_n=\frac{1}{n-122,5}$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n-122,5=+\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} v_n=0}$

3_ (w_n) définie par $w_n=-2n^2+14n-7$

La limite est une forme indéterminée donc on factorise par le terme dominant (plus haut degré ici).

$$w_n=n^2\left(-2+\frac{14}{n}-\frac{7}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} n=+\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{14}{n}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2}=0$$

$\lim_{n\to+\infty} -2+\frac{14}{n}-\frac{7}{n^2}=\lim_{n\to+\infty} -2+\lim_{n\to+\infty}\frac{14}{n}-\lim_{n\to+\infty}\frac{7}{n^2}=-2$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n=-\infty}$

4_ (t_n) définie par $t_n=\frac{3n+2}{4n-5}$

La limite est une forme indéterminée donc on factorise numérateur et dénominateur par le terme dominant (plus haut degré ici) et on simplifie.

$$t_n=\frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(4-\frac{5}{n}\right)}=\frac{3+\frac{2}{n}}{4-\frac{5}{n}}$$

De même qu'a la question 3, $\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{2}{n}=3$ et $\lim_{n\to+\infty} 4-\frac{5}{n}=4$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} t_n=\frac{3}{4}}$

5_ (s_n) définie par $s_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n+6}$

La limite est une forme indéterminée donc on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n+6}$, et on simplifie le numérateur.

$$s_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n+6}=\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+6}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+6}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+6}}=\frac{n+1-n-6}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+6}}=\frac{-5}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+6}}$$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}=+\infty \; et \; \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+6}=+\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} s_n=0}$

Exercice n° 4

La suite (b_n) est définie pour tout *n* non nul par $b_n=\frac{\cos(n)}{n}$

1_ $-1\leqslant\cos n\leqslant 1$

2_ $n>0$ donc $-\frac{1}{n}\leqslant\frac{\cos n}{n}\leqslant\frac{1}{n}$

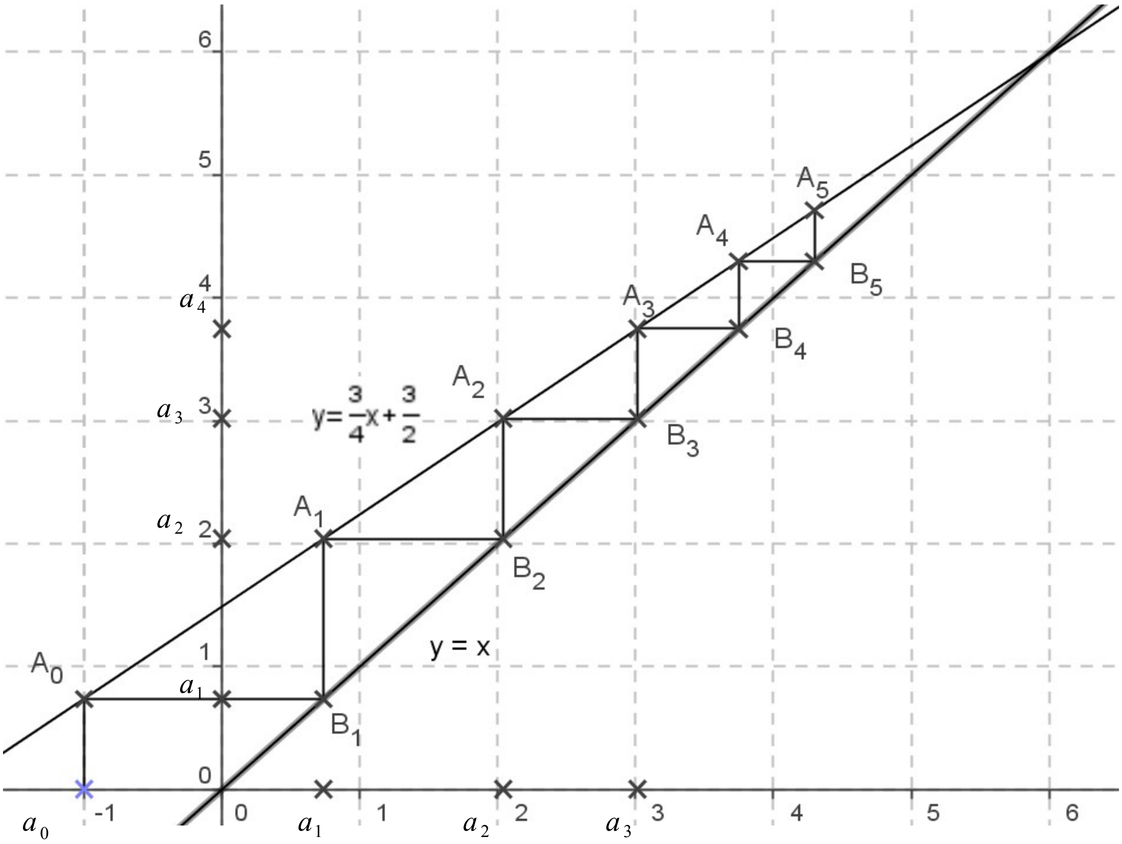
3_ $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ d'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{n}=0}$

Exercice n° 5

Suite définie par une formule de récurrence.

La suite (a_n) est définie par $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{3}{2} \\ a_0=-1 \end{cases}$

1_ Représentation graphique de la suite (a_n)



2_ Graphiquement, on peut conjecturer que les suites de points (A_n) et (B_n) convergent vers le points d'intersection, $P(6\ ;\ 6)$, des deux courbes et donc que (a_n) converge vers <u>*l* = 6.</u>

3_ La suite (u_n) est définie par $u_n=a_n-l$ d'après la conjecture $u_n=a_n-6$

Exprimons u_{n+1} en fonction de a_n

$$u_{n+1}=a_{n+1}-6=\frac{3}{4}a_n+\frac{3}{2}-6=\frac{3a_n+3\times2-6\times4}{4}=\frac{3a_n-3\times6}{4}$$

Montrons que (u_n) est géométrique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3a_n-3\times6}{4}\frac{1}{a_n-6}=\frac{3(a_n-6)}{4(a_n-6)}=\frac{3}{4}$$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q=\frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0=-1-6=-7$

4_ (u_n) est géométrique de raison $q=\frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0=-7$ donc $\boxed{u_n=-7\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

5_ $-1<q<1$ donc la suite géométrique (u_n) converge vers 0.

6_ $u_n=a_n-6$ donc $a_n=u_n+6$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}(u_n+6)=\lim_{n\to+\infty} u_n+\lim_{n\to+\infty} 6=6}$ C.Q.F.D.