Corrigé du contrôle sur les suites et leurs limites

I _a (u_n) est définie par : $u_n=-2n+2$

$u_{n+1}=-2(n+1)+2=-2n$

$u_{n+1}-u_n=-2n-(-2n+2)=2$

$u_{n+1}-u_n$ est constant donc (u_n) est arithmétique de raison $r=2$.

_b (v_n) définie par : $v_n=5^n$

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{5^{n+1}}{5^n}=5$

$\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant donc (v_n) est géométrique de raison $q=5$.

_c (w_n) définie par : $w_{n+1}=6w_n+3$ et $w_0=3$

$w_1=21$ et $w_2=129$

$w_1-w_0\neq w_2-w_1$ donc (w_n) n'est pas aritmétique.

$\frac{w_2}{w_1}\neq\frac{w_1}{w_0}$ donc (w_n) n'est pas géométrique.

_d (t_n) définie par : $t_{n+1}=3t_n$ et $t_0=9$

$\frac{t_{n+1}}{t_n}=3$ donc (t_n) est géométrique de raison $q=3$.

_e (s_n) définie par : $s_{n+1}=s_n+3$ et $s_0=-7$

$s_{n+1}-s_n=3$ donc (s_n) est arithmétique de raison $r=3$.

_f (k_n) définie par : $k_n=n^2$

$k_0=0$, $k_1=1$, $k_2=4$

$k_1-k_0\neq k_2-k_1$ donc (k_n) n'est pas aritmétique.

$w_0=0$ donc si (w_n) était géométrique tous les termes seraient nuls. (w_n) n'est pas géométrique.

II_ (u_n) est une suite telle que $u_3=256$ et $u_6=864$.

1_ (u_n) est une suite arithmétique donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$, $u_n=u_p+(n-p)r$.

$u_6=u_3+3r$

$864-256=3r$

La raison r est $\frac{608}{3}$

$u_0=u_3-3r=256-\frac{3\times608}{3}$

Le premier terme est $u_0=-352$

2_ (u_n) est une suite géométrique donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p q^{n-p}$.

$u_6 = q^3 u_3$

$\frac{864}{256} = q^3$

$q = \sqrt[3]{\frac{864}{256}} = \frac{3}{2}$

$u_0 = q^{-3} u_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 256 = \frac{2048}{27}$

III _ a $S_n = 12 + 15 + 18 + 21 + ... + 132$ est la somme des termes d'une suite arthmétique (u_n) de raison 3 donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + 3(n-p)$

Nombre de termes de la somme.
Le plus facile est de prendre pour rang du premier terme 1.

$u_1 = 12$ et $u_n = u_1 + (n-1)r$

Soit *n* le rang du dernier terme :

$132 = 12 + 3(n-1)$

$n - 1 = \frac{120}{3} = 40$

n = 41 et comme de 1 à 41 il y a 41 nombres, il y a aussi 41 termes.

Remarque.
Si on choisit 0 comme rang du premier, on trouve *n* = 40.
Comme de 0 à 40 il y a 41 nombres, il y a aussi 41 termes.

Calcul de la somme.

$S_n = \frac{(premier\ terme + dernier\ terme) \times nombre\ de\ termes}{2}$

$S_n = \frac{41(12 + 132)}{2} = 2952$

_b $T_n = 2 + 6 + 18 + 54 + ... + 1\,062\,882$ est la somme des termes d'une suite géo (u_n) de raison 3 donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^{n-p} u_p$

Nombre de termes de la somme.
Le plus facile est de prendre pour rang du premier terme 1.

$u_1 = 2$ et $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

Soit *n* le rang du dernier terme :

$\frac{1\,062\,882}{2} = 3^{n-1}$

$3^{n-1} = 531\,441$

On affiche sur la calculatrice les puissances de 3 et on trouve $3^{12} = 531\,441$

n - 1 = 12 donc il y a 13 termes.

Calcul de la somme.

$$S_n = premier\ terme \times \frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$$

$$S_n = 2\times\frac{1-3^{13}}{1-3} = 3^{13}-1 = 1\ 594\ 322$$

Remarque.
On peut employer une autre formule qui évite de calculer le nombre de termes.

$$S_n = premier\ terme \times \frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$$

Appelons u_0 le premier terme et n le nombre de termes.
Le dernier est donc $u_{n-1} = u_0 q^{n-1}$
Transformons l'écriture de la somme :

$$S_n = u_0\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{u_0 - u_0 q^n}{1-q} = \frac{u_0 - u_{n-1}q}{1-q}$$

$$S_n = \frac{premier\ terme - dernier\ terme \times q}{1-q}$$

IV_ 1_ Sens de variation de (u_n).

$u_n = n^2 + 4n - 5$

$u_{n+1} = (n+1)^2 + 4(n+1) - 5 = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 - 5 = n^2 + 6n$

Signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = n^2 + 6n - (n^2 + 4n - 5) = 2n + 5$

$n \in \mathbb{N}$ donc $n \geqslant 0$ et $2n + 5 > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

2_ Sens de variation de (v_n).

$$v_n = \frac{2n+1}{3n+2}$$

$$v_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2} = \frac{2n+3}{3n+5}$$

Signe de $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+3}{3n+5} - \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{(2n+3)(3n+2)-(2n+1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{6n^2+4n+9n+6-(6n^2+10n+3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{1}{(3n+5)(3n+2)}$$

$n \in \mathbb{N}$ donc $n \geqslant 0$, $3n+5 > 0$ et $3n+2 > 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$ donc (v_n) est strictement croissante.

V_ 1_ Limite de la suite (u_n) tel que $u_n=-2n^2+4$

$\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} -2n^2=-\infty$

$\lim_{n\to+\infty} 4=4$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

2_ Limite de la suite (v_n) tel que $v_n=\frac{3}{n}-5$

$n\to+\infty$

$\frac{1}{n}\to0$

$\frac{3}{n}\to0$

$-5\to-5$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} v_n=-5$

3_ Limite de la suite (v_n) tel que $v_n=\frac{2n-5}{4n+6}$

$\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} 2n-5=+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} 4n+6=+\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n$ est une forme indéterminée

On factorise au numérateur et au dénominateur le terme dominant (plus haut degré) puis on simplifie :

$$v_n=\frac{2n-5}{4n+6}=\frac{n\left(2-\frac{5}{n}\right)}{n\left(4+\frac{6}{n}\right)}=\frac{2-\frac{5}{n}}{4+\frac{6}{n}}$$

$\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} 2=2$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{n}=0$

$\lim_{n\to+\infty} 4=4$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n}=0$

Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

4_ Limite de la suite (w_n) tel que $w_n = n^2 - 3n + 123$

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} -3n = -\infty$

$\lim_{n \to +\infty} 123 = 123$

Donc $\lim_{n \to +\infty} w_n$ est une forme indéterminée.

On factorise le terme dominant (plus haut degré) :

$$w_n = n^2 - 3n + 123 = n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{123}{n^2}\right)$$

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} 1 = 1$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{-3}{n} = 0$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{123}{n^2} = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

5_ Limite de la suite (t_n) tel que $t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$

La forme est encore indéterminée.

Pour supprimer les radicaux du « numérateur » on multiplie « numérateur » et « dénominateur » par la quantité conjuguée $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$ ($a + b$ et $a - b$ sont des quantités conjuguées).

$$t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{n+1-n-2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$$

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} -1 = -1$

Donc $\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$