Démonstration exigibles en Terminale S

En enseignement obligatoire

1. **Limites et continuité**

   (a) Connaître la traduction mathématique de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

   (b) Démonstration du théorème des gendarmes pour les fonctions, lorsque x tends vers l'infini.

   (c) Connaissant le théorème des valeurs intermédiaires, démontrer : "*Si f fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ alors, pour tout réel δ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \delta$ admet une unique solution dans $[a, b]$.*"

2. **Fonction exponentielle et équations différentielles**

   (a) On admet qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Démontrer l'unicité d'une telle fonction.

   (b) La fonction exponentielle, notée exp, a les propriétés suivantes :

   - exp est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$;
   - sa fonction dérivée est elle-même ($\exp' = \exp$S) ;
   - $\exp(0) = 1$.

   À l'aide de ces propriétés de l'exponentielle, savoir démontrer, dans l'ordre de votre choix, les deux propriétés suivantes :

   - pour tout réel x, $\exp x \times \exp(-x) = 1$;
   - pour tous les réels a et x, $\exp(a + x) = \exp(a) \times \exp(x)$.

   (c) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
   (Deux façons de procéder :

   - en dérivant deux fois la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$, que pour tout réel x positif $e^x > \dfrac{x^2}{2}$;
   - en partant de l'inégalité $e^x > x$, et en particulier pour tout $x > 0$, $e^{\frac{x}{2}} > \dfrac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow e^x > \dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.)

   (d) Démontrer : "*x_0 et y_0 étant deux réels fixés, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.*"

3. **Logarithme népérien** : démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
(Deux façons de procéder :
   - en utilisant le prérequis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et en posant $\mathrm{X} = e^x$;
   - en étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$ et en montrant que sur $[1, +\infty[$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \sqrt{x}$.)

4. **Nombres complexes** : démontrer les propriétés "$\arg(zz') = \arg z + \arg z'\,[2\pi]$" et "$\arg(\dfrac{z}{z'}) = \arg z - \arg z'\,[2\pi]$".

5. **Suites (limites, suites adjacentes)**
   (a) Connaître la traduction mathématique de suite majorée/minorée/bornée, et de $\lim u_n = l$ (convergence) et $\lim u_n = \pm\infty$ (divergence).
   (b) Démontrer que : "*Toute suite croissante non majorée tend vers* $+\infty$."

6. **Intégration et primitives** : f est une fonction continue, croissante et positive sur un intervalle I et a est un élément quelconque de I.
Démontrer : "*La fonction* F *définie sur* I *par* $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ *est l'unique primitive de* f *s'annulant en* a."

7. **Probabilités et statistiques**
   (a) $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p}$ (démonstration analytique ou ensembliste).
   (b) $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$

En enseignement de spécialité

1. **Arithmétique** : l'ensemble des nombres premiers est infini.

2. **Similitudes**
   (a) Une similitude ayant deux points fixes est l'identité du plan ou une symétrie axiale.
   (b) Démontrer : "*Étant donnés quatre points* A, B, A$'$, B$'$ *tels que* $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ *et* $\mathrm{A}' \neq \mathrm{B}'$, *il existe une similitude directe unique transformant* A *en* A$'$ *et* B *en* B$'$."