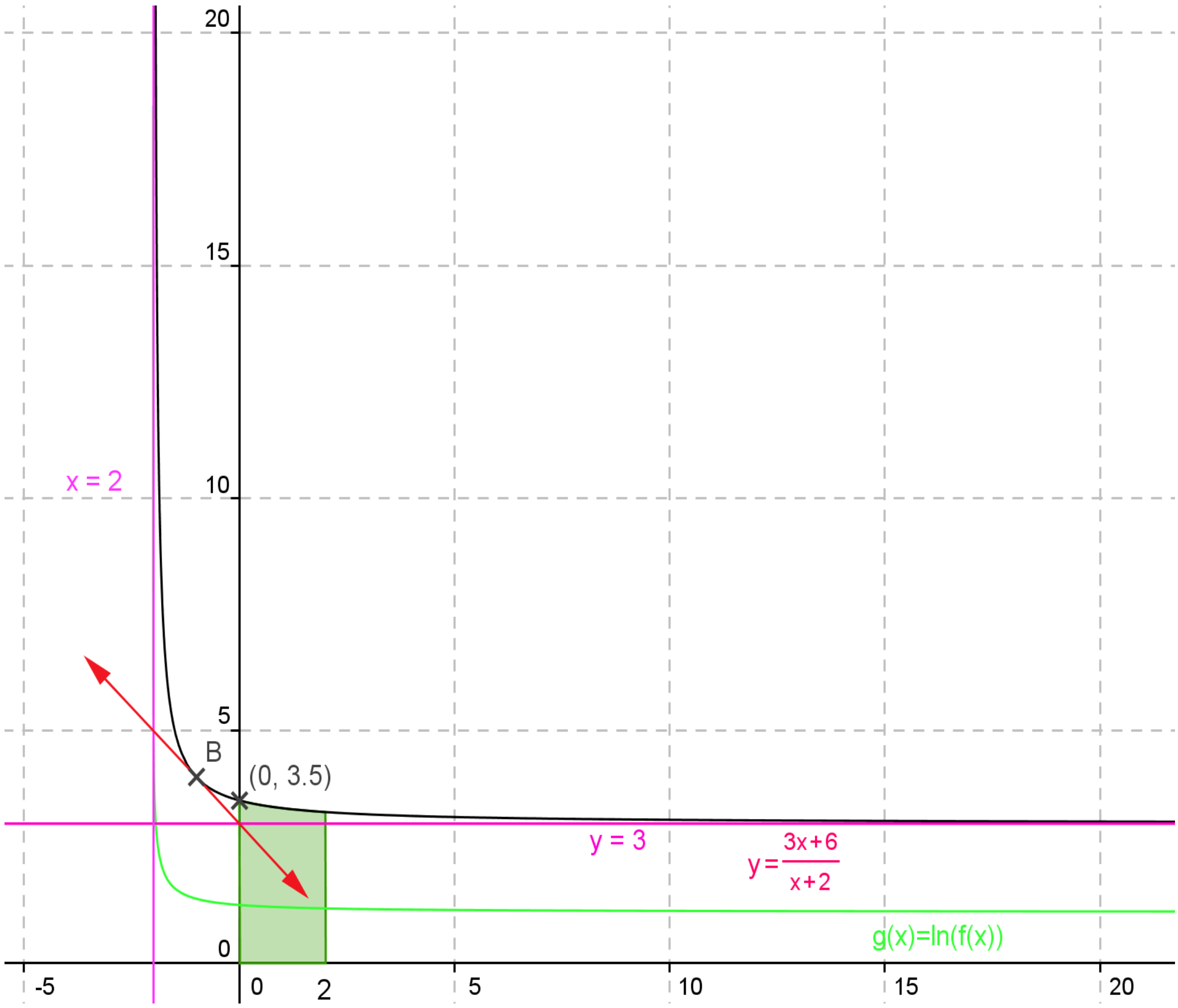
Exercice 1 Vrai faux 4 points
Commun tous les candidats

f est définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=3+\frac{1}{x+2}$$

Allure de la courbe.



1_ $f(x)=\dfrac{3x+6}{x+2}$ FAUX

On peut tracer la courbe de g définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=\dfrac{3x+6}{x+2}$

$\dfrac{3x+6}{x+2}=3\neq f(x)$ Voir le graphique

2_ La courbe C_f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3,5. VRAI

On lie sur la courbe et on vérifie dans le tableau de valeurs. $f(0)=3+\dfrac{1}{2}=3{,}5$

3_ $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} f(x)=3$ FAUX

Attention à ne pas confondre avec la limite en $+\infty$.
On voit sur le graphique que $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -2} x+2=0$, $x>-2$ donc $x+2>0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} \dfrac{1}{x+2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} f(x)=+\infty$

4_ $\int_0^2 f(x)\,dx=6\ln 2$ FAUX

$6\ln 2\simeq 4{,}16$ et d'après le graphique l'intégrale (correspondant à l'aire du domaine vert) est supérieure à 6.

Calcul de l'intégrale

Modèle : $g=\dfrac{u'}{u}$ et $u>0$ $G=\ln u$

$u=x+2$ $u'=1$ $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$ $G(x)=\ln(x+2)$

$$\int_0^2 f(x)\,dx=[3x+\ln(x+2)]_0^2=6+\ln 4-\ln 2=6+\ln\frac{4}{2}=6+\ln 2$$

5_ La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe. VRAI

On peut vérifier sur le graphique.

A vue de nez, quand x est grand, $\dfrac{1}{x+2}$ est petit (proche de 0) donc $f(x)\simeq 3$.

Par le calcul.

$f(x)-3=\dfrac{1}{x+2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-3=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$

6_ $f(x)>3$ pour tout x de $]-2\ ;\ +\infty[$. VRAI

On vérifie sur le graphique.

Par le calcul.

$x\in]-2\ ;\ +\infty[$ donc $x+2>0$ et $\dfrac{1}{x+2}>0$ donc $f(x)=3+\dfrac{1}{x+2}>3$

7_ $f'(-1)=-1$ VRAI

La droite de coefficient directeur -1, passant par $B(-1\ ;\ f(-1))$ à l'air tangente à la courbe.

Ici, il faut calculer $f'(-1)$ pour être sûr.

Modèle : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$ $u(x)=x+2$ $u'(x)=1$

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x+2)^2}$ $f'(-1)=-1$

8_ La fonction g définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=\ln(f(x))$ est décroissante. VRAI.

On vérifie sur le graphique.

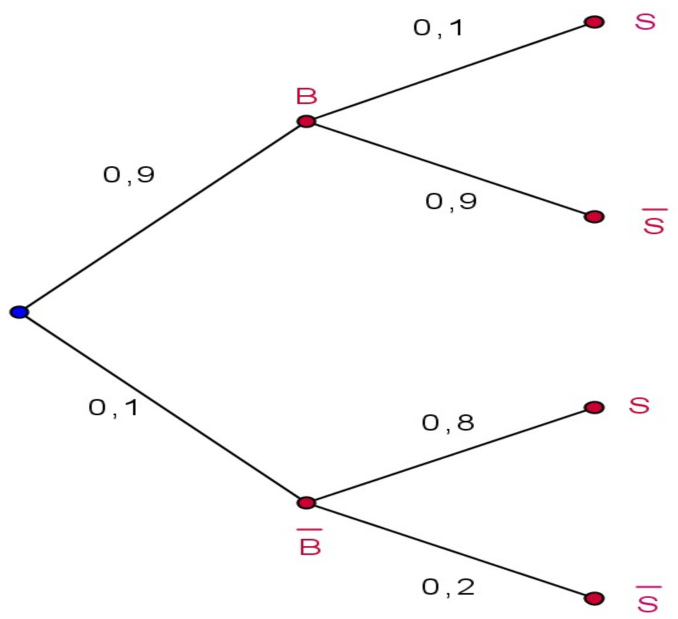
La fonction ln est croissante donc f et ln(f) ont le même sens de variation.

Exercice 2 Probabilités 5 points
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

B est l'évènement « la personne a un bon publicitaire », 90% des personnes en ont un.
S est l'évènement « la personne achète un salon », 10% des personnes ayant un bon publicitaire et 80% de celles qui n'en ont pas achète un salon.

Partie 1

1_ Arbre pondéré.



2_ a_ $p_B(\overline{S}) = 0{,}9$
La probabilité que la personne n'achète pas un salon sachant qu'elle a un bon publicitaire est égale à 0,9

2_b_ $p(S)=p(B\cap S)+p(\overline{B}\cap S)=p(B)\times p_B(S)+p(\overline{B})\times p_{\overline{B}}(S)$
$p(S)=0{,}9\times 0{,}1+0{,}1\times 0{,}8=0{,}17$
La probabilité que la personne achète un salon est égale à 0,17

2_c_ $p_S(B)=\dfrac{p(B\cap S)}{p(S)}=\dfrac{0{,}09}{0{,}17}\simeq 0{,}53$ au centième près.
La probabilité que la personne soit venu avec un bon publicitaire sachant qu'elle a acheté un salon est égale à 0,53 au centième près.

Partie 2

Un bon publicitaire et le cadeau associé coûtent 15 € et un salon vendu rapporte 500 € s'il est vendu sans bon.

1_ Loi de probabilité du bénéfice réalisé.

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas de salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas de salon	
Bénéfice réalisé par le magasin en euro.	485	-15	500	0	Total
Probabilité	0,09	0,81	0,08	0,02	1

2_ Le bénéfice moyen par client est l'espérance mathématique de la loi de gain, G.

$$E(G)=485\times 0{,}09-15\times 0{,}81+500\times 0{,}08+0\times 0{,}2=71{,}5$$

Ce bénéfice est égal à 71,5 €.

3_ Le directeur change la valeur du cadeau. x est le prix de revient.

Loi de probabilité du bénéfice réalisé et espérance mathématique.

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas de salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas de salon	
Bénéfice réalisé par le magasin en euro.	$500-x$	$-x$	500	0	Total
Probabilité	0,09	0,81	0,08	0,02	1
$G_i p_i$	$45-0{,}09x$	$0{,}81x$	40	0	$85-0{,}9x$

$E(G)=85-0{,}9x$

4_ On veut réaliser un gain de 76 € par personne donc :

$$E(G)=76$$
$$85-0{,}9x=76$$
$$9=0{,}9x$$
$$x=10$$

Le prix de revient du bon doit être de 10 €.

Exercice 3 Statistiques 5 points
Commun à tous les candidats

Tableau de le série statistique double $(i\ ;\ d_i)_{1\leqslant i\leqslant 8}$, où i est le numéro de la planète et d_i la distance au Soleil en millions de km.

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Céres	Jupiter	Saturne	Uranus
i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,6	228,06	396,44	778,73	1427,7	2872,4

1_ Le couple (3 ; 149,60) signifie que la Terre est à 149,60 millions de km du Soleil.

2_

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Céres	Jupiter	Saturne	Uranus
i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,6	228,06	396,44	778,73	1427,7	2872,4
$d_i - d_1$	0,000	50,330	91,660	170,120	338,500	720,790	1369,760	2814,460
$y_i = \ln(d_i - d_1)$		3,919	4,518	5,137	5,825	6,580	7,222	7,943

3_ Une équation de la droite d'ajustement par les moindres carrés avec une précision au millième est :

$$y_i = 0{,}676\,i + 2{,}498$$

Attention, on donne les résultats arrondi au millième mais les calculs se font avec les valeurs non arrondies sinon on obtiendra 2,499 au lieu de 2,498 et on obtiendra un résultat légèrement différent de celui demandé à la question 5.

4_ Nuage de points. (Voir sur la page suivante)

5_ a_ Modélisation de d_i.

$$y_i = 0{,}676\,i + 2{,}498$$
$$\ln(d_i - d_1) = 0{,}676\,i + 2{,}498$$
$$d_i - d_1 = \mathrm{e}^{0{,}676\,i + 2{,}498}$$
$$d_i - d_1 = \mathrm{e}^{2{,}498}\,\mathrm{e}^{0{,}676\,i}$$

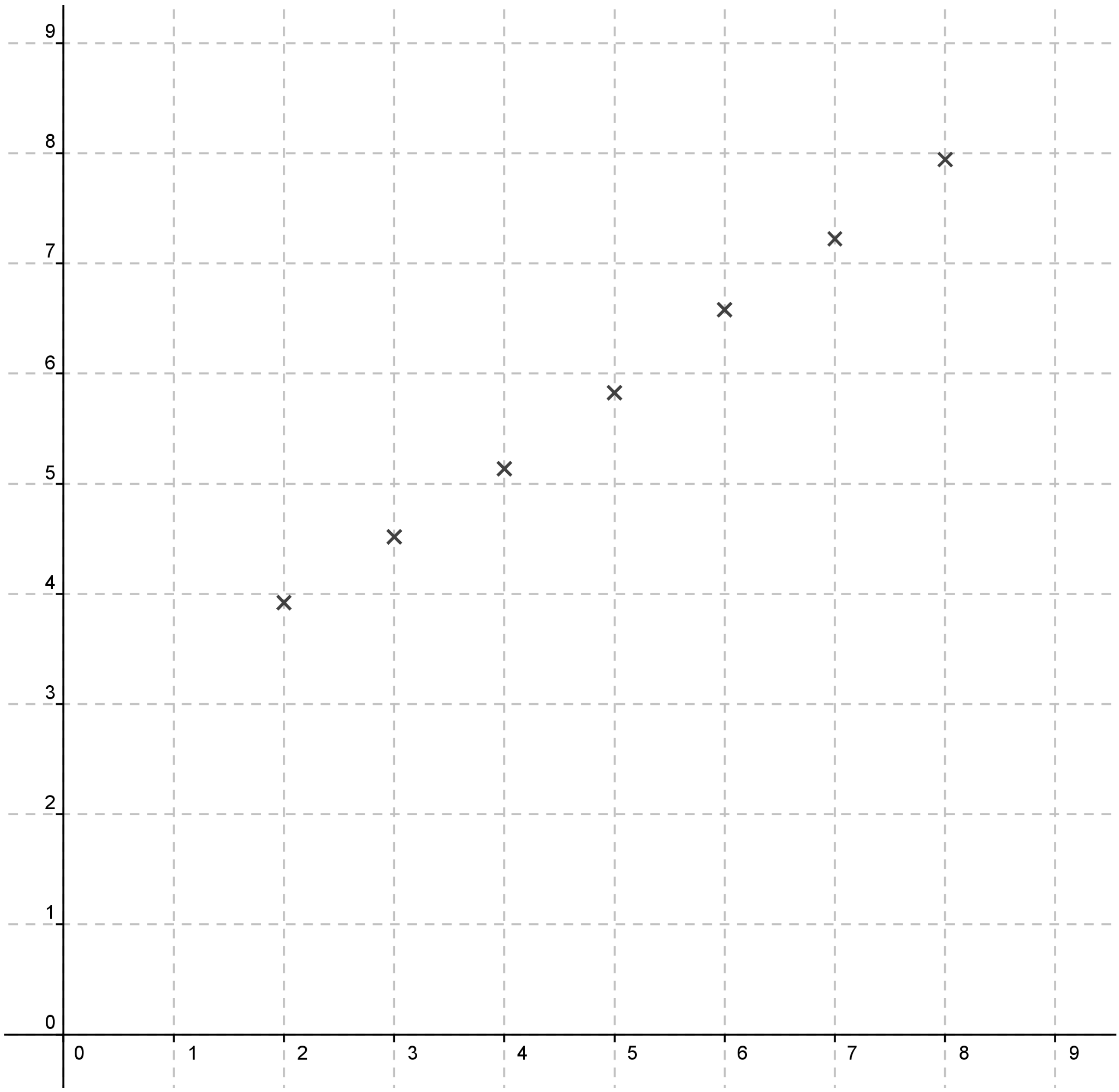
$\mathrm{e}^{2{,}498} \simeq 12{,}158$

$\mathrm{e}^{0{,}676 i} = \left(\mathrm{e}^{0{,}676}\right)^i$ comme $\mathrm{e}^{0{,}676} \simeq 1{,}966$ alors $\mathrm{e}^{0{,}676\,i} = 1{,}966^i$

$$d_i - d_1 = 12{,}16 \times 1{,}966^i$$
$$d_i = d_1 + 12{,}16 \times 1{,}966^i$$
$$d_i = 57{,}94 + 12{,}16 \times 1{,}966^i$$

C.Q.F.D.

Nuage de points



5_b_ Distance probable d'une neuvième planète.

$d_9 = 57{,}94 + 12{,}16 \times 1{,}966^9 = 5586{,}578$

Une neuvième planète d'après ce modèle serait à 5 586,578 millions de km du Soleil.

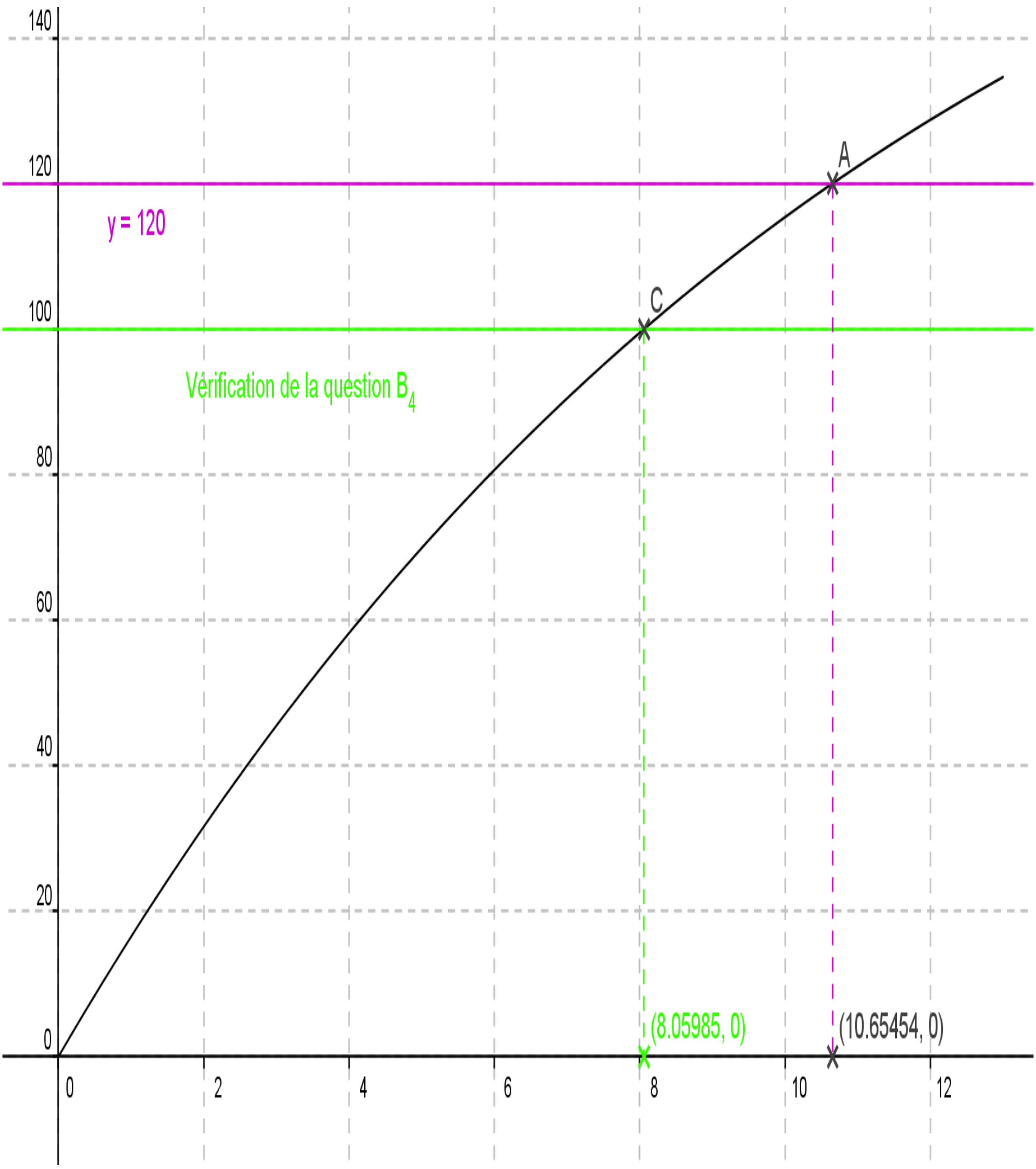
Exercice 4 Analyse 6 points
Commun à tous les candidats

Partie A

La dépréciation cumulée, en k€, à l'instant *t*, en années, d'un autocar acheté 200 k€, instant *t*=0, est donné par la fonction *D* définie sur $I = [\,0\,;\,13\,]$ par :

$$D(t)=200\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}086t}\right)$$

Année au cours de laquelle l'investissement a perdu 60%.



L'investissement perd 60% au cours de l'année 10.

Partie B

1_ $V(t)$ est la valeur à l'instant t donc :

$$V(t)=200-D(t)=200-200\left(1-\mathrm{e}^{-0,086t}\right)=200\times\mathrm{e}^{-0,086t}$$

2_ Sens de variation.

Modèle $\left(\mathrm{e}^{u}\right)'=u'\mathrm{e}^{u}$ $\quad u(t)=-0,086t \quad u'(t)=-0,086$

$V'(t)=200\times-0,086\,\mathrm{e}^{-0,086t}=-17,2\,\mathrm{e}^{-0,086t}$

$\mathrm{e}^{-0,086t}>0$ donc $V'(t)<0$ et la fonction V est strictement strictement décroissante sur I.

On peut aussi dire que la fonction exponentielle est croissante donc V a le m^me sens de variation que la fonction linéaire l définie par $l(t)=-0,086t$. Donc V est strictement décroissante.

3_ Valeur au bout de 13 ans.
$V(13)=200\times\mathrm{e}^{-0,086\times13}\simeq65,3866$
On peut espérer revendre l'autocar 65 387 € au bout de 13 ans.

4_ L'autocar a perdu la moitié de sa valeur donc :

$$V(t)=100$$
$$200\times\mathrm{e}^{-0,086t}=100$$
$$\mathrm{e}^{-0,086t}=\frac{1}{2}$$
$$-0,086t=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$t=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0,086}\simeq8,0599$$

L'autocar a perdu la moitié de sa valeur au cours de la huitième année.

Partie C

Les recettes nettes, hors dépréciation, sont données par la fonction R définie sur I par :

$$R(t)=110\left(5+t-5\mathrm{e}^{0,1t}\right)$$

1_a_ Variations de R.
Dérivée

$R'(t)=110\left(5+t-5\,\mathrm{e}^{0,1t}\right)'=110\left(1-0,5\,\mathrm{e}^{0,1t}\right)$
Signe de R'.

$$1-0,5\,\mathrm{e}^{0,1t}>0$$
$$1>0,5\,\mathrm{e}^{0,1t}$$
$$2>\mathrm{e}^{0,1t}$$
$$\ln2>0,1t$$
$$t<10\ln2$$

Tableau de variations.

x	0		$10 \ln 2$		13
$R'(x)$		+	0	-	
$R(x)$	0	$\nearrow$	$550(2\ln 2-1)$	$\searrow$	$110(18-5e^{1,3})$

1_b_ Les recettes nettes sont maximales pour $t_0=10\ln 2$ et se montent à 550 (2 ln 2 -1) k€.

Les recettes maximales sont égales à 212 462 € durant la sixième année. (Vu la précision demandée, je pense qu'on demande le montant des recettes arrondi et non t_0.)

1_c_ Tableau de valeurs.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$D(t)$	0	16	32	45	58	70	81	90	99	108	115	122	129	135
$R(t)$	0	52	98	138	169	193	208	212	206	187	155	108	44	-38
$E(t)$	0	36	67	92	111	123	127	122	106	79	40	-15	-85	-173

(Le tableau a compléter ne comprend pas toutes ces valeurs)

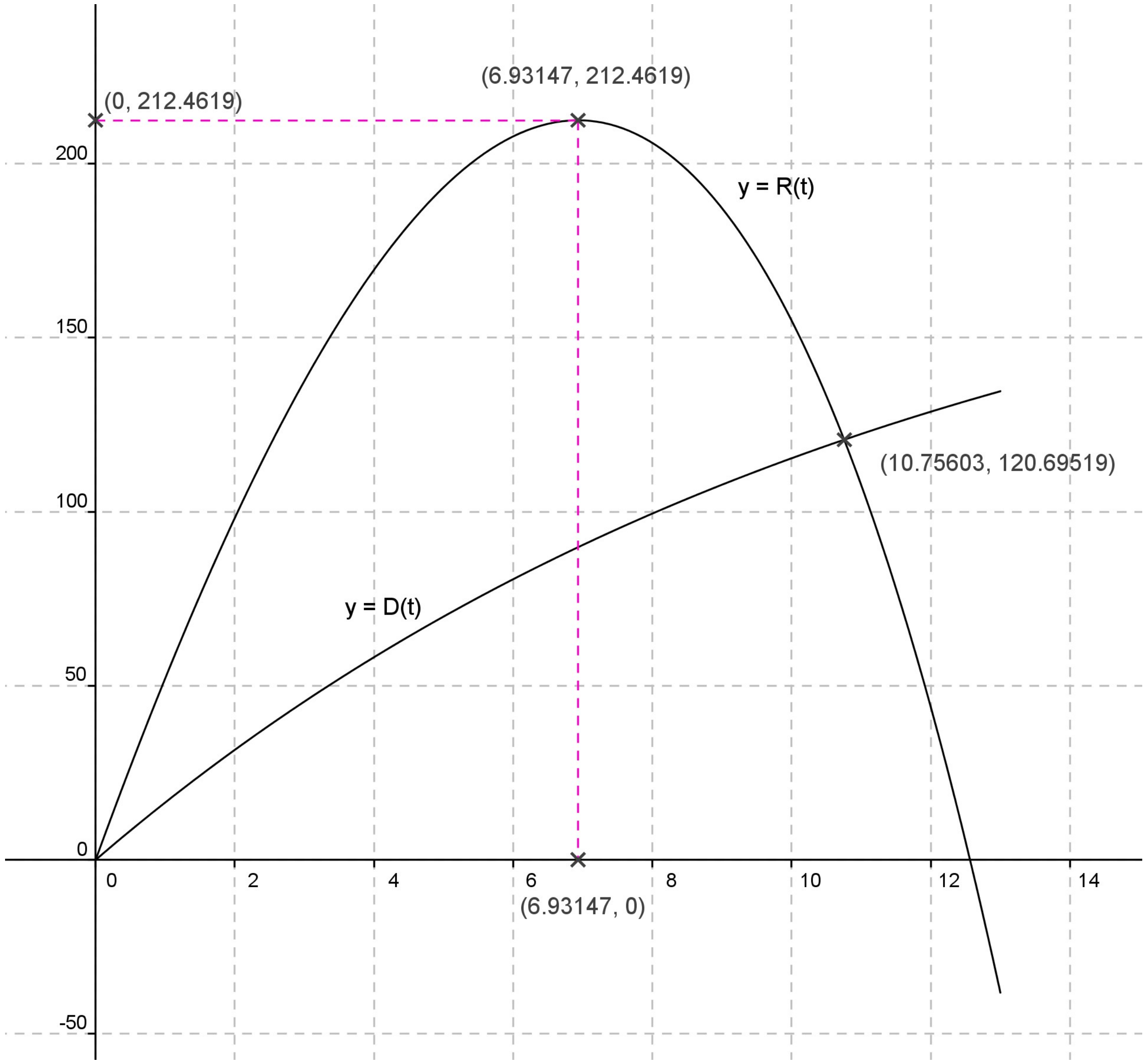
Courbe de *R* sur la feuille suivante.

2_ L'exploitation, la différence des recettes et de la dépréciation, est donnée par la fonction *E* définie sur *I* par $E(t)=R(t)-E(t)$

2_a_ L'exploitation est le plus profitable au cours de la sixième.

2_b_ A partir de la onzième année, l'exploitation est déficitaire.

Représentation graphique de *R*.



Exercice 2 Graphes probabilistes 5 points.
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie I (<u>calculs exacts demandés</u>)

Deux feux tricolores, « a » et « b », se succèdent. Les feux fonctionnent de manière indépendante.

A est l'évènement le feux « a » est vert, $p(A)=\frac{3}{4}$

B est l'évènement le feux « b » est vert, $p(B)=\frac{1}{2}$

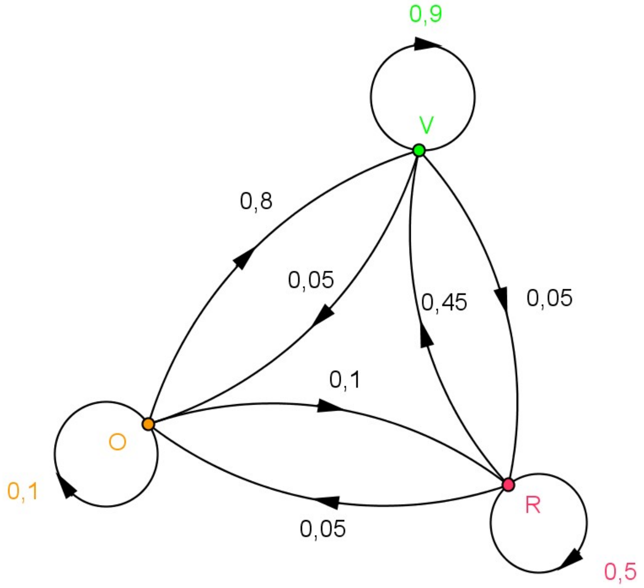
1_ A et B sont indépendants donc $p(A\cap B)=p(A)\,p(B)$
La probabilité que les deux feux soient verts est $\frac{3}{8}$

2_ Le contraire de l'évènement « au moins un des feux est vert » est l'évènement $\overline{A}\cap\overline{B}$
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants donc $p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A})\,p(\overline{B})$
$p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A})\,p(\overline{B})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
La probabilité qu'au moins un des feux soit vert est $\frac{7}{8}$

Partie II (résultats demandés à 10^{-2} près)

Il y a une succession de feux tricolores.
V_n est l'évènement le n^ième^ feux est vert.
O_n est l'évènement le n^ième^ feux est orange.
R_n est l'évènement le n^ième^ feux est rouge.

1_a_ Graphe probabiliste.
$p_{V_n}(V_{n+1})=0{,}9$, $p_{V_n}(R_{n+1})=0{,}05$, $p_{O_n}(O_{n+1})=0{,}1$, $p_{O_n}(V_{n+1})=0{,}8$, $p_{R_n}(R_{n+1})=0{,}5$, $p_{R_n}(O_{n+1})=0{,}05$ donc le graphe probabiliste est :



1_b_ Matrice de transition.
$P_n = (V_n \ \ O_n \ \ R_n)$ est l'état probabiliste du n[ième] feu tricolore donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}$$

2_a Le premier feu est vert donc $P_1 = (1 \ \ 0 \ \ 0)$

$P_2 = P_1 M = (0,9 \ \ 0,05 \ \ 0,05)$

2_b_ $P_3 = (0,87 \ \ 0,05 \ \ 0,08)$ donc $P_4 = P_3 M = (0,841 \ \ 0,0515 \ \ 0,0875)$
La probabilité que le quatrième feu soit vert est égale à 0,841.

3_ Le premier feu est rouge donc $P_1 = (0 \ \ 0 \ \ 1)$.

$P_2 = P_1 M = (0,45 \ \ 0,05 \ \ 0,5)$

4_ Quelque soit l'état initial, à partir d'un certain rang *n*, $P_n = (0,85 \ \ 0,05 \ \ 0,1)$ donc à partir du n[ième] feu tricolore la probabilité qu'il soit vert est 0,85, la probabilité qu'il soit orange est 0,05 et la probabilité qu'il soit rouge est 0,1.