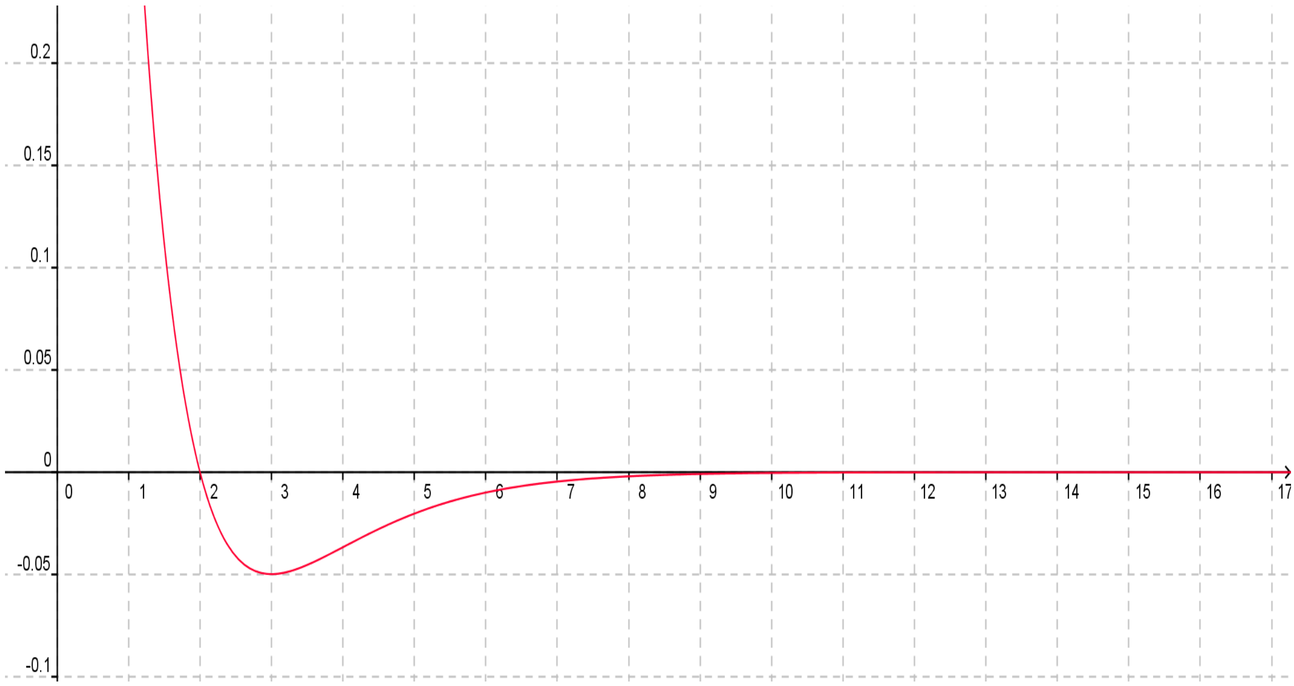
QCM et position relative de deux courbes ***4 points***
Commun à tous les candidats

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(-x+2)e^{-x}$

Partie A. Q.C.M.

En premier, on trace la courbe en choisissant une fenêtre adaptée.



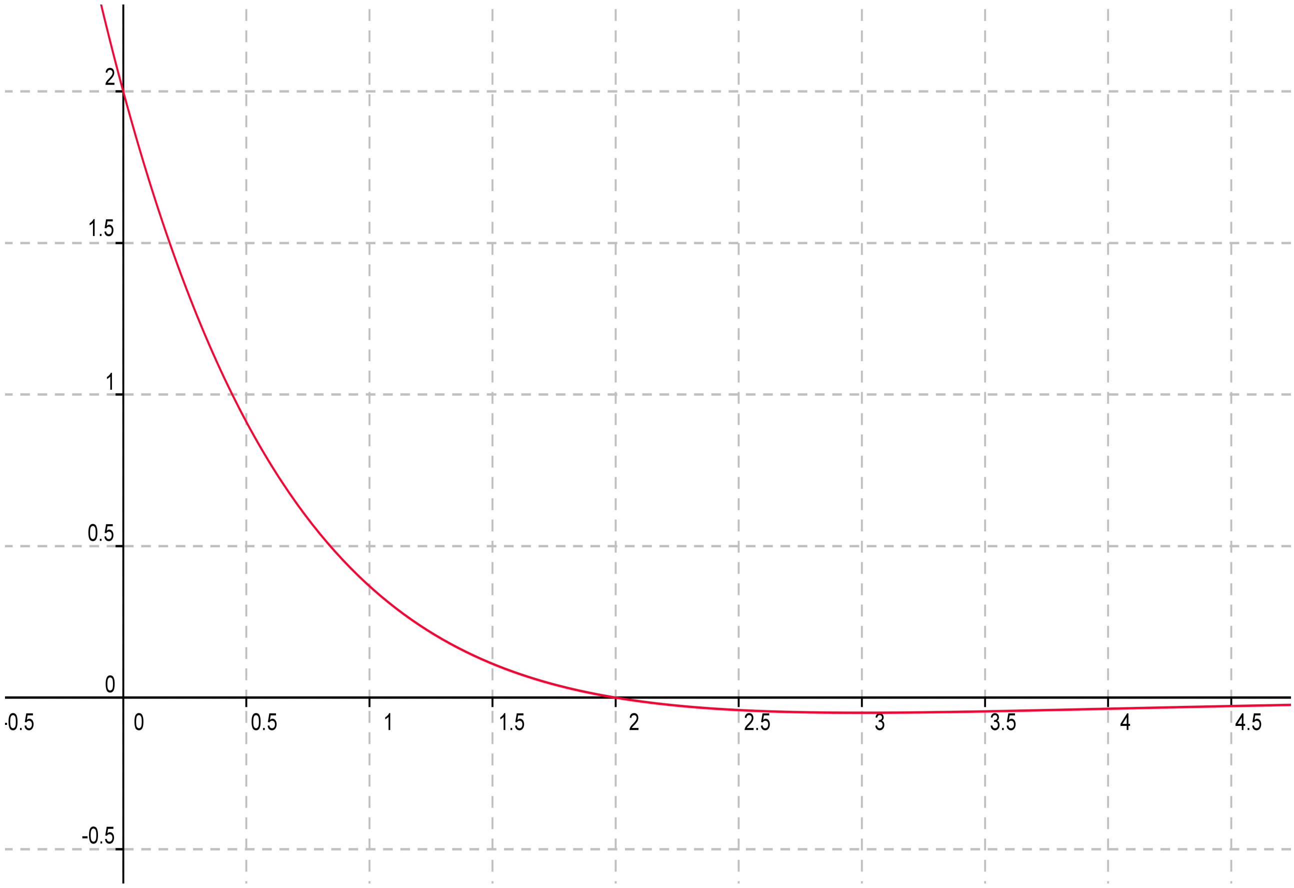
1_ La limite de f en $+\infty$ est 0. Réponse b.

Démonstration non demandée.
$f(x)=(-x+2)e^{-x}=\frac{-x+2}{e^x}=\frac{-x}{e^x}+\frac{2}{e^{-x}}$
La limite en $+\infty$ est une forme indéterminée.
On sait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

2_ L'équation $f(x)=0$ admet une solution unique. Réponse b.

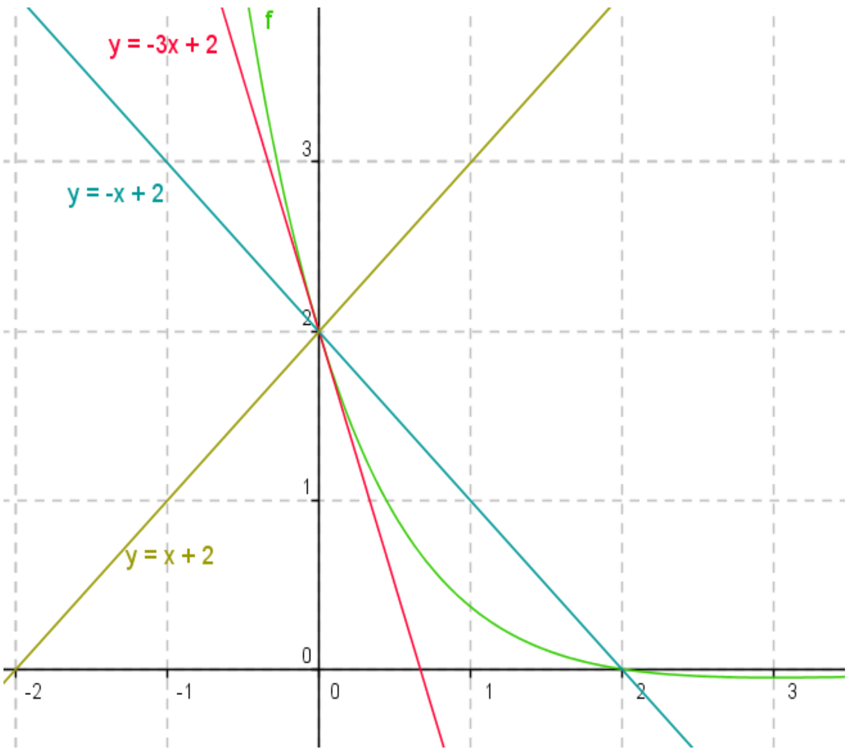
Graphiquement, on voit qu'il y a une solution, 2. Changeons la fenêtre (voir page suivante). On voit que cette solution est unique.

Démonstration non demandée.
$(-x+2)e^{-x}=0$ et $e^{-x}>0$ donc $-x+2=0$ et $x=2$.



3_ L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = -3x + 2$. Réponse *a*.

On trace les trois droites.



Démonstration non demandée.
Dérivée de *f*.
Modèle :

$(uv)' = u'v + uv' \qquad u = -x+2 \qquad v = \mathrm{e}^{-x} \qquad u' = -1 \qquad v' = -\mathrm{e}^{-x}$

$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (-x+2)(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(x-3)$

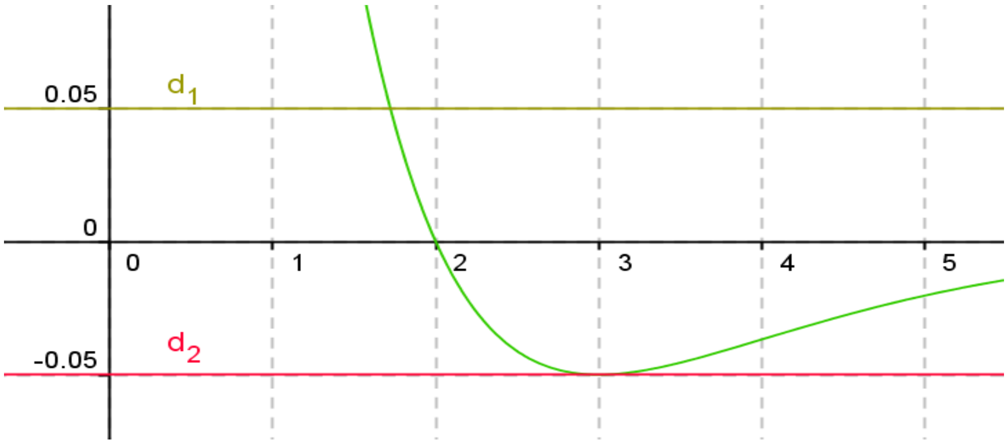
Le coefficient directeur de la tangent est $f'(0) = -3$.
L'ordonnée à l'origine est 2.

4_ Le minimum est $\dfrac{-1}{\mathrm{e}^3}$. Réponse *b*.

On trace les droites $d_1 : y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$, $d_2 : y = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^3}$ et $d_3 : y = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^{-3}}$

On peut aussi vérifier dans le tableau de valeurs.

On ne voit pas grand chose mais on peut tout de suite éliminer d_3 . Donc éliminer la réponse *c*. On zoome.



Démonstration non demandée.
$f'(x)=0$
$(x-2)e^{-x}=0$ et $e^{-x}>0$ donc $x-3=0$ et $x=3$.
D'après le graphique 3, correspond bien à un minimum.
$f(3)=(-3+2)e^{-3}=\dfrac{-1}{e^3}$

Partie B. Cette partie doit être justifiée.

Position relative de C_f et de la Δ d'équation $y=-x+2$ sur] 0 ; 2 [

On a déjà tracé cette droite et elle est au-dessus, strictement de la courbe sur] 0 ; 2 [

Justification. On doit comparer les ordonnées des points de C_f et Δ, respectivement $f(x)$ et $-x+2$.
Pour comparer deux nombres, on cherche le signe de leur différence.
Etude du signe de $f(x)-(-x+2)$
$f(x)-(-x+2)=(-x+2)e^{-x}-(-x+2)=(-x+2)\left(e^{-x}-1\right)$
Remarque. Pour trouver le signe, on factorise puis on applique la règle des signes.

$x\in]0\ ;\ 2[$ donc $0<x<2$
$-2<-x<0$
$0<-x+2<2$
$-x+2$ est strictement positif.

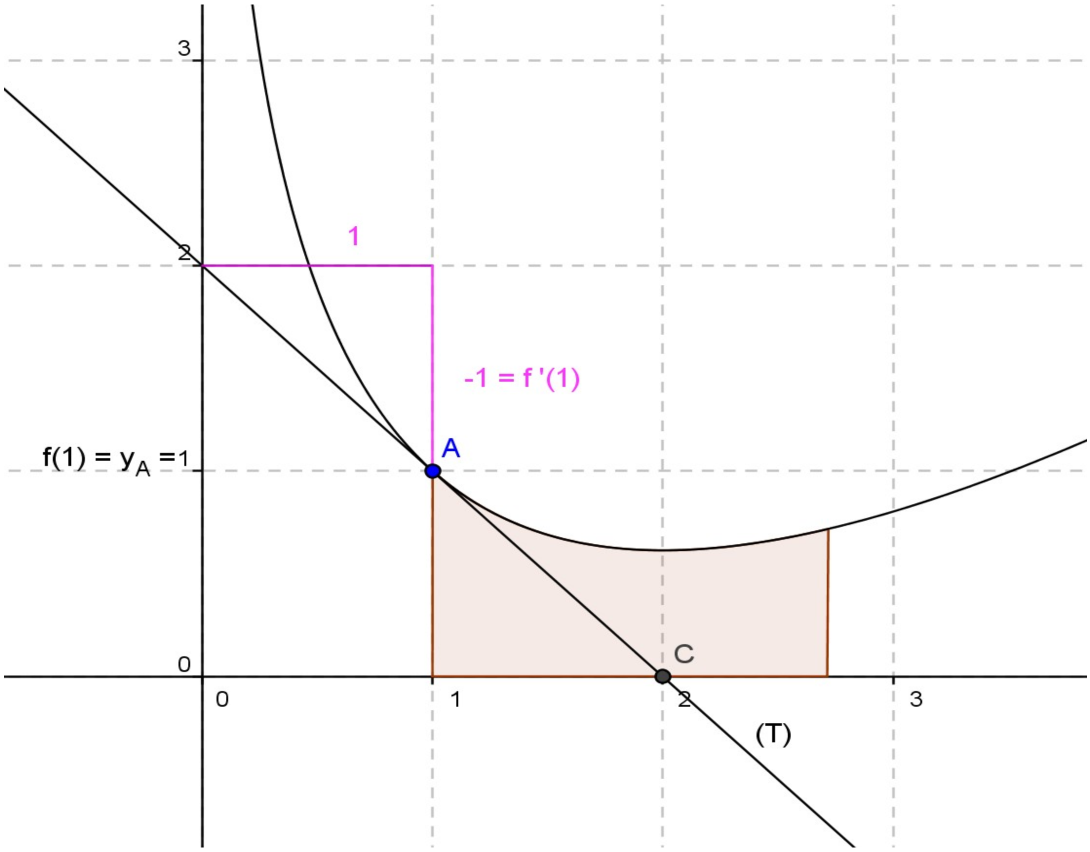
$-2<-x<0$ et l'exponentielle est croissante donc $e^{-2}<e^{-x}<e^0=1$
$e^{-2}-1<e^{-x}-1<0$
$e^{-x}-1<0$ est strictement négatif.

$f(x)-(-x+2)<0$ sur] 0 ; 2 [donc la courbe C_f est en dessous de la droite Δ .

On peut faire aussi un tableau de signe pour étudier le signe de $(-x+2)\left(e^{-x}-1\right)$

Analyse ***6 points***
Commun à tous les candidats.

La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



Partie A

1_ Par lecture graphique ou par hypothèse.
$f(1)=y_A=1$
La tangente en A(1 ; 1) est (T) donc $f'(1)=-1$
La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2 donc $f'(2)=0$

2_a_ Fonction dérivée.
$f(x)=ax+b+c\ln x$
Attention, ici a, b et c sont des constantes.

$f'(x)=(ax)'+(b)'+(c\ln x)'=a(x)'+0+c(\ln x)'=a+c\times\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=a+\dfrac{c}{x}$

2_b Mise en équations.
$f(1)=1$ donc $a+b+c\ln 1=1$ donc $a+b=1$

$f'(1)=-1$ donc $a+\dfrac{c}{1}=-1$ donc $a+c=-1$

$f'(2)=0$ donc $a+\dfrac{c}{2}=0$

Les réels a, b et c vérifient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=-1 \\ a+\dfrac{c}{2}=0 \end{cases}$

2_c Résolution du système.

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=-1 \\ 2a+c=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a+b=1 \\ c=-1-a \\ 2a+(-1-a)=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b=1-a \\ c=-1-1 \\ a=1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-2 \end{cases}$$

La fonction *f* est définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=x-2\ln x$
Ce qu'on peut vérifier dans la partie B.

Partie B

La fonction *f* est définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=x-2\ln x$

1_ Asymptote verticale.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$$

L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de *f*.

2_ La fonction *g* est définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x)=x\ln x-x$

2_a_ Fonction dérivée.
Modèle :

$(uv)'=u'v+uv'$ $\quad u=x \quad v=\ln x \quad u'=1 \quad v'=\dfrac{1}{x}$

$$(x\ln x)'=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$$
$$g'(x)=\ln x+1-1=\ln x$$

2_b_ Primitive de *f*.

$f(x)=x-2g'(x)$ donc une primitive de f est $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-2g(x)$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}-2x\ln x+2x$$

2_c_ Aire du domaine grisé.

$$\int_1^{e} f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - 2x\ln x\right]_1^{e} = \frac{e^2}{2} + 2e - 2e\ln e - \left(\frac{1}{2} + 2\right)$$

$$\int_1^{e} f(x)dx = \frac{e^2 - 5}{2}$$

L'aire mesure $\frac{e^2-5}{2}$ u.a.

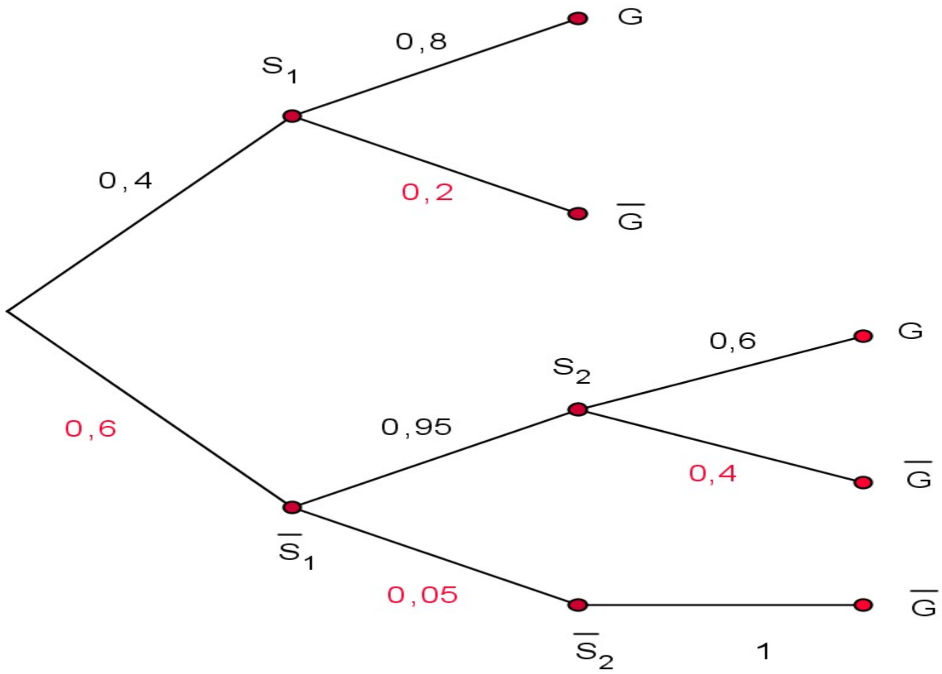
Probabilités 5 points
Commun à tous les candidats

Un joueur de tennis, Naderer, réussit son premier service, événement S_1, avec une probabilité de 40% et son deuxième service, événement S_2, avec une probabilité de 95%.

Si son premier service est bon, il gagne, événement *G*, avec une probabilité de 80%.

Si son deuxième service est bon, il gagne avec une probabilité de 60%.

1_ Arbre pondéré.



En noir, les hypothèses. En rouge, les valeurs déduites.

2_ $p(S_1 \cap G) = p(S_1)\, p_{S_1}(G) = 0{,}4 \times 0{,}8$

$p(S_1 \cap G) = 0{,}32$

3_ Probabilité de gagner.

$p(G) = p(S_1 \cap G) + p(\overline{S_1} \cap S_2 \cap G) = 0{,}32 + 0{,}6 \times 0{,}95 \times 0{,}6$

$p(G) = 0{,}662$

4_ Naderer a gagné l'échange, la probabilité qu'il ait gagné son premier service est :

$$p_G(S_1)=\frac{p(S_1\cap G)}{p(G)}=\frac{0{,}32}{0{,}662}$$

$p_G(S_1)\simeq 0{,}483$ au millième près.

5_ L'expérience consiste à faire quatre échanges. On considère que chaque échange est indépendant. On s'intéresse au nombre d'échanges gagnés qui suit une loi binomiale.

E est l'évènement, Naderer gagne 4 échanges.

$p(E)=(p(G))^4=0{,}662^4$

$p(E)\simeq 0{,}192$ au millième près.

Statistiques 5 points
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Chiffre d'affaires du secteur du bâtiments gros œuvre.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
Indice y_i	100	105,6	106,9	110,8	121,3	132,5	145,5

Partie 1

1_ Nuage de points

2_ Les points ne sont vraiment pas alignés donc un ajustement affine n'est pas approprié.

Partie 2

1_

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
z_i = ln y_i	4,61	4,66	4,67	4,71	4,8	4,89	4,98	5,09

2_a_ Droite d'ajustement.

$z=0{,}07x+4{,}56$

2_b_ Ajustement exponentiel.

$z=0{,}07x+4{,}56$

$\ln y=0{,}07x+4{,}56$

$y=\mathrm{e}^{0{,}07x+4{,}56}$

$y=\mathrm{e}^{4{,}56}\times\mathrm{e}^{0{,}07x}$

$y=95{,}58\times\mathrm{e}^{0{,}07x}$

2_c_ Représentation graphique de *f* définie par $f(x)=95{,}6\times\mathrm{e}^{0{,}07x}$

Voir le graphique de la question 1.

2_d_ Estimation du chiffre d'affaires en 2009.

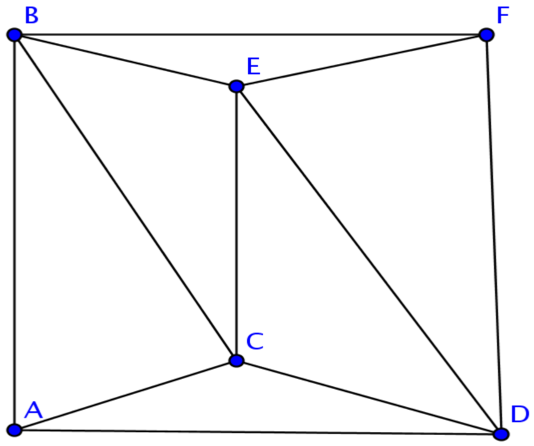
En 2009 le rang est 9.
$y_9 = 95{,}58 \times e^{0{,}07 \times 9}$
$y_9 \simeq 179{,}5$

Partie 3

L'analyse faite en avril 2008 prévoit une baisse des permis de construire donc une décroissance du chiffre d'affaires du gros œuvre. Il faut donc prévoir un nouveau modèle (qui sera sûrement aussi faux que le premier. Il y a une chose que l'on ne sait pas faire en économie, prévoir.)

Exercice 4 5 points
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

G est le graphe ci-dessous.



1_ Toute paire de sommets est relié par une chaîne donc le graphe est connexe.

2_ Il y a exactement deux sommets de degré impair, A et F de degré 3, donc il existe une chaîne eulérienne joignant A et F par exemple :

A-B-C-D-E-F-B-E-C-A-D-F

3_ Il y a un sommet de degré impair donc il n'existe pas de cycle eulérien.
Si on ajoute l'arête A-F alors tous les sommet sont de degré pair, degré 4, et il existe un cycle eulérien.

4_ A-B-C est un graphe complet d'ordre 3 donc le nombre chromatique est minoré par 3, $\gamma \geqslant 3$.

Le plus haut degré est 4 donc le nombre chromatique est majoré par 5, $\gamma \leqslant 5$.

$$3 \leqslant \gamma \leqslant 5$$

5_ Matrice associée.

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&1\\1&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&1&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

6_ Nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à F.

$$M^3=\begin{pmatrix}4&10&8&10&6&5\\10&6&11&6&11&10\\8&11&8&11&11&6\\10&6&11&6&11&10\\6&11&11&11&8&8\\5&10&6&10&8&4\end{pmatrix}$$

Le coefficient $m_{1\,6}$ de la première ligne et sixième colonne de la matrice M^3 est 5 donc il y a 5 chaînes de longueur 3 partant de A et aboutissant en F :

A-B-E-F
A-C-B-F
A-C-D-F
A-C-E-F
A-D-E-F