Analyse.

1_ f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=30\,\mathrm{e}^{-5x}$

$$f'(x)=30\left(-5\,\mathrm{e}^{-5x}\right)=-150\,\mathrm{e}^{-5x}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-5x}>0$ donc $f'<0$

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^{5x}+1$

$$g'(x)=5\,\mathrm{e}^{5x}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{5x}>0$ donc $g'>0$

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2_ Voir le graphique en dernière page.

3_ (E) est l'équation $f(x)=g(x)$

a_ $30\,\mathrm{e}^{-5x}=\mathrm{e}^{5x}+1$

$0=\mathrm{e}^{5x}+1-30\,\mathrm{e}^{-5x}$

$0=\mathrm{e}^{5x}+1-\dfrac{30}{\mathrm{e}^{-5x}}$

$0=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{5x}\right)^2+\mathrm{e}^{5x}-30}{\mathrm{e}^{5x}}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{5x}>0$ donc (E) est équivalente à l'équation (F) :

$\left(\mathrm{e}^{5x}\right)^2+\mathrm{e}^{5x}-30=0$

b_ Résolution de $X^2+X-30=0$

$\Delta=b^2-4ac=1+4\times30=11^2$

$X_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-11}{2}=-6$

$X_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+11}{2}=5$

$S=\{-6\ ;\ 5\}$

c_ En remplaçant e^{5x} par X dans l'équation (F) on obtient l'équation $X^2+X-30=0$ qui a pour solutions -6 et 5 donc les solution de (F) vérifient :

$\mathrm{e}^{5x}=-6$ ou $\mathrm{e}^{5x}=5$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{5x}>0$ donc $\mathrm{e}^{5x}=-6$ n'a pas de solution.

$\mathrm{e}^{5x}=5$

$\ln\left(\mathrm{e}^{5x}\right)=\ln 5$

$5x=\ln 5$

$x=\dfrac{\ln 5}{5}$

(E) a une unique solution, $x=\dfrac{\ln 5}{5}$

Probabilités. Exercice n°1

Méthodes.

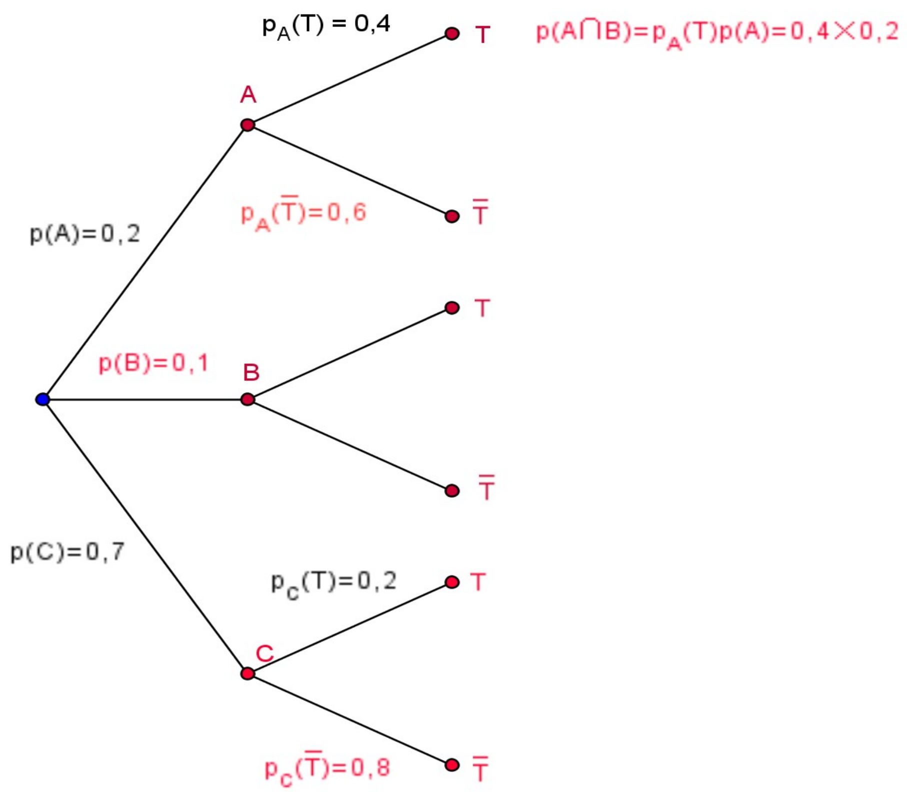
On complète, en rouge ici, l'arbre pondéré, donné dans l'énoncé, sachant que la somme des probabilités d'un « bouquet de branches » est toujours égal à 1.

On écrit explicitement les probabilités car les étudiants confondent très souvent la probabilité d'un événement, comme $p(T)$, et la probabilité conditionnelle, comme $p_A(T)$.

On écrit la formule de la probabilité de l'évènement A et B, $A\cap B$, qui se calcule en faisant le produit des pondérations des branches et on retrouve ainsi la formule:

$$p(A\cap B)=p_A(T)\times p(A)$$

Cette formule est équivalente (pour p(A) non nulle) à : $p_A(T)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$



1_ D'après l'arbre $p_A(T)=0{,}4$

2_ a_ $p(A)+p(B)+p(C)=1$ donc $p(B)=0{,}1$

b_ $p_A(\overline{T})=1-p_A(T)=0{,}6$

c_ $p(A\cap B)=p_A(T)\times p(A)=0{,}08$

3_ $p(T)=0{,}3$

a_ $p_A(T)=\dfrac{p(A\cap T)}{p(A)}=\dfrac{0{,}08}{0{,}3}=\dfrac{4}{15}$

b_ D'après la formule des probabilités totales :

$$p(T)=p(A\cap T)+p(B\cap T)+p(C\cap T)$$
$$0{,}3=0{,}08+p(B\cap T)+0{,}7\times 0{,}2$$
$$p(B\cap T)=0{,}08$$

$$p_B(T)=\frac{p(B\cap T)}{p(B)}$$
$$p_B(T)=\frac{0{,}08}{0{,}1}=0{,}8$$

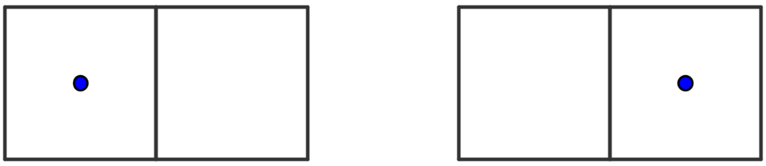
Probabilités. Exercice n°2

Un jeu de domino comporte 28 dominos. On tire au hasard un domino. On gagne, en euro, la somme des points inscrits sur le domino.

Méthodes.

Un domino comporte deux parties carrées. Sur chacune il y a de 0 à 6 points. La meilleure méthode pour établir la loi de probabilité du gain est de faire un tableau (il y a deux entrées) avec le nombre de point dans chaque case . On pourrait aussi faire un arbre, mais c'est plus compliqué et moins lisible.

Attention à ne pas compter deux fois certains dominos.



Les deux image de dominos ci-dessus représente le même domino. Si on comptait tous les dominos deux fois, la loi de probabilité serait la même. Mais ici, on compte une seule fois les doubles et deux fois les autres et le raisonnement est faux.

Dans les entrées, pour ne pas compter deux fois le même domino, on indiquera :

« face » comportant le plus petit nombre de points

« face » comportant le plus petit nombre de points

On vérifiera que le tableau comporte 28 cases.

1_ Loi de probabilité du gain.

Tableau des gains

		Plus petit nombre de points						
		0	1	2	3	4	5	6
Plus grand nombre de points	0	0						
	1	1	2					
	2	2	3	4				
	3	3	4	5	6			
	4	4	5	6	7	8		
	5	5	6	7	8	9	10	
	6	6	7	8	9	10	11	12

D'après le tableau la loi de probabilité de gains est :

Loi de probabilité du gain														
Gain g_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i en fraction	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	1

2_ Le joueur doit miser 7 €.

L'espérance de gain, sans compter la mise, d'un joueur est l'espérance mathématique du gain (moyenne statistique), E(G).

Méthode.

On entre la loi de probabilité du gain dans la calculatrice et on lit l'espérance mathématique E(G). La calculatrice ne faisant pas la différence entre les probabilités et les statistiques, il faut lire la moyenne statistique $\overline{X}$.

Si on fait le calcul à la main ou sur un tableur, voici le tableau du calcul de E(G).

Loi de probabilité du gain															
Gain g_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total	
p_i en fraction	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	1	
Valeur approchée p_i	0,0357	0,0357	0,0714	0,0714	0,1071	0,1071	0,1429	0,1071	0,1071	0,0714	0,0714	0,0357	0,0357	1	
$g_i p_i$	0,0000	0,0357	0,1429	0,2143	0,4286	0,5357	0,8571	0,7500	0,8571	0,6429	0,7143	0,3929	0,4286	6	E(G)

E(G) = 6 € et on mise 7 € donc, en moyenne, le joueur perd 1 € par partie et ne peut espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties. « Ce n'est pas une fête mais un casino. »

Représentation graphique des fonctions f et g.