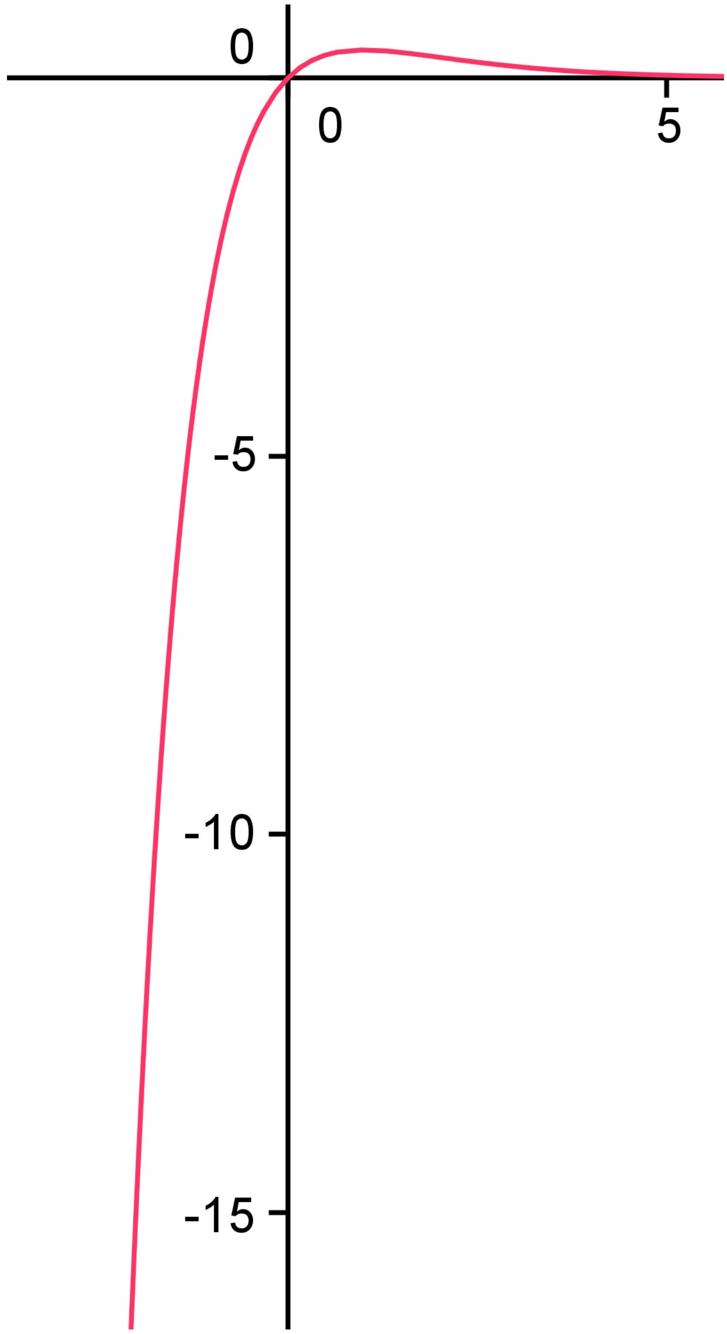
Exercice 1 Q.C.M. 4 points
Commun tous les candidats

On ne demande aucune justification, donc il faut être sûr et rapide et choisir une méthode simple, graphique ou par élimination, on vérifie aussi dans le tableau de valeurs. Donc les méthodes que je donne ne sont pas toujours celles que doit employer un candidat mais elles servent à comprendre et à réviser pour le baccalauréat.

1_ $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = -\infty$. Réponse C.

Graphiquement :



Par le calcul :
déjà x < 0 et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $x\,\mathrm{e}^{-x} < 0$. On élimine la réponse B.

x tend vers $-\infty$ donc $-x$ tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-x} = -\infty$$

2_ La fonction ln est croissante donc les fonctions u et ln u (quand elle existe) ont le même sens de variation. $u' \leqslant 0$ donc u est décroissante et f = ln$u$ aussi. Réponse B.

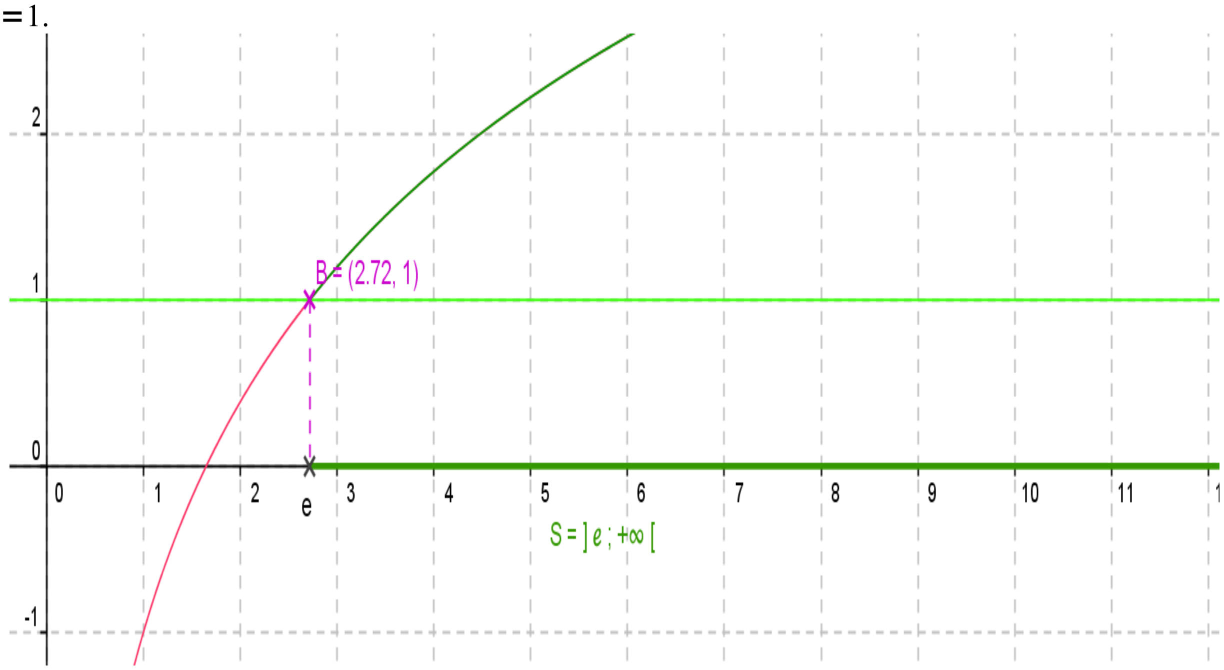
On peut aussi calculer la dérivée.

$f' = \dfrac{u'}{u}$, $u > 0$ et $u' \leqslant 0$ donc $f' \leqslant 0$

f est décroissante.

3_ $2 \ln x - 1 > 1$ a pour solution l'intervalle $]e\ ;\ +\infty[$. Réponse C.

Graphiquement. On trace la courbe de f définie par $f(x) = 2 \ln x - 1$ et la droite d'équation $y = 1$.

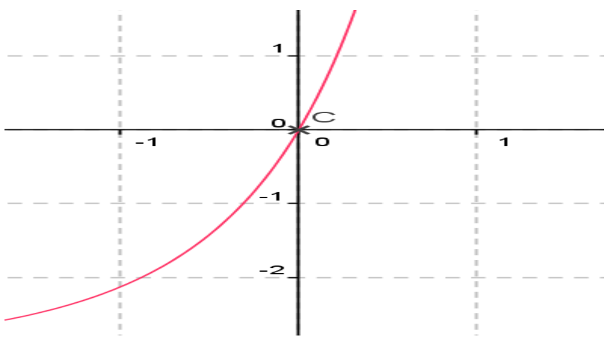


Par le calcul :

$2 \ln x - 1 > 1$ donc $2 \ln x > 2$ donc $\ln x > 1$ donc $x > e$

4_ $e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0$ a une solution unique.
Réponse A.

Graphiquement.



En raisonnant sur les variations :

La fonction exponentielle est strictement croissante, ainsi que la fonction double, $x \to 2x$ donc la fonction f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}-3$ est strictement croissante et $\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}-3=0$ admet au plus une solution (C'est le théorème des valeurs intermédiaires).

$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x}=0$, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}=0$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$.

$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}=+\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

$0\in]-3\ ;\ +\infty[$ donc l'équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Par le calcul :

$\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}-3=0$

$\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2+2\mathrm{e}^{x}-3=0$

On pose $y=\mathrm{e}^{x}$ l'équation devient $y^2+2y-3=0$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-3)=16=4^2$$

$$y_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-4}{2}=-3 \qquad y_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+4}{2}=1$$

$\mathrm{e}^{x}=y$ donc $e^{x}=-3$, impossible, ou $e^{x}=1$ et $x=0$

Il y a bien une solution unique.

Exercice 2 Probabilités 5 points
Commun tous les candidats

Un collectionneur de pièces de monnaie a observé que ses pièces peuvent présenter au maximum deux défauts notés *a* et *b*. Il prélève au hasard une pièce dans sa collection.

On note *A* l'évènement : «Une pièce prélevée au hasard dans la collection présente le défaut *a* ».

On note *B* l'évènement : «Une pièce prélevée au hasard dans la collection présente le défaut *b* ».

Première partie

1_ $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$p(A)=0{,}2$; $p(B)=0{,}1$ et $p(A\cup B)=0{,}25$ donc :

$0{,}25=0{,}2+0{,}1-p(A\cap B)$

$p(A\cap B)=0{,}05$

La probabilité de l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans la collection présente les deux défauts » est égale à 0,05.

2_ $p(A)\,p(B)=0{,}02\neq p(A\cap B)$ donc *A* et *B* ne sont pas indépendants.

3_ « Une pièce prélevée au hasard dans la collection ne présente aucun des deux défauts » est l'évènement $\overline{A\cup B}$ donc sa probabilité est égale à $1-p(A\cup B)=0{,}75$

4_ $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{0{,}05}{0{,}1}=\dfrac{1}{2}$

La probabilité de trouver le défaut *a*, en prélevant au hasard une pièce parmi celles qui présentent le défaut *b* est égale à 0,5.

5_ $p_{\overline{B}}(A)=\dfrac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}$

$p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})=p(A)$ donc $p(A\cap\overline{B})=0{,}2-0{,}05=0{,}15$

$p(\overline{B})=1-p(B)=0{,}9$

$p_{\overline{B}}(A)=\dfrac{0{,}15}{0{,}9}=\dfrac{1}{6}$

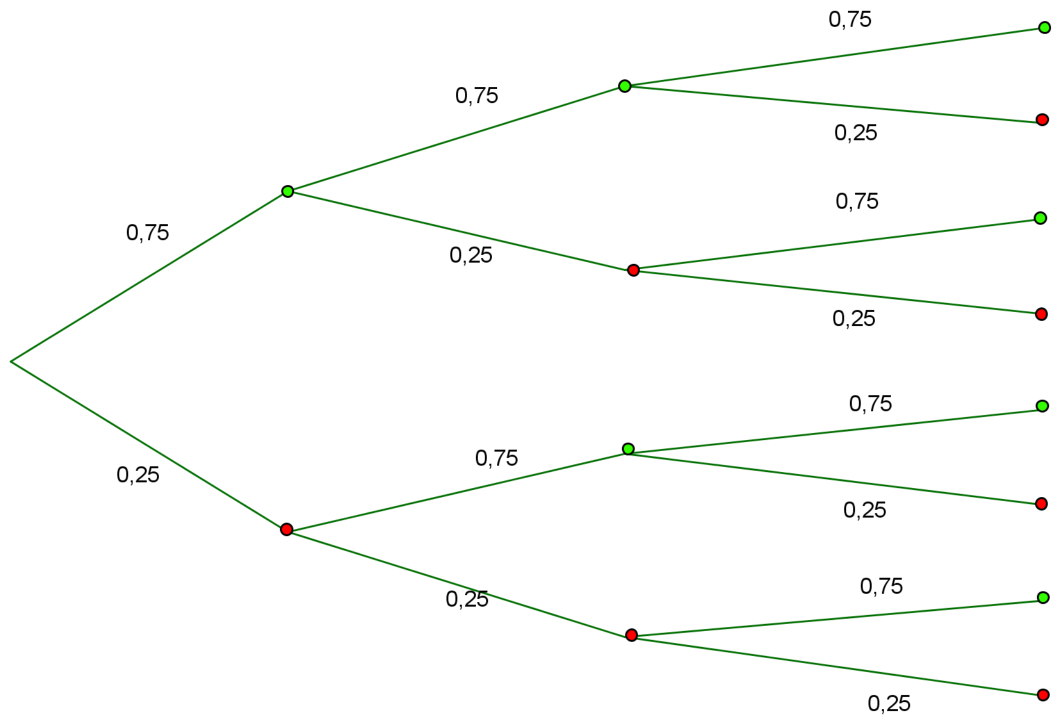
La probabilité de tirer une pièce ayant le défaut *a* parmi celles qui ont le défaut *b* est égale à 0,67 à 10^{-2} près.

Deuxième partie

On prélève au hasard trois pièces dans la collection.
On suppose que ces trois prélèvements sont indépendants donc la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces sans défaut suit une loi binomiale.

Arbre pondéré.

Un point vert représente l'évènement *E*, la pièce n'a pas de défaut et un rouge l'évènement contraire.



1_ L'évènement *F* une seule des trois pièces a un défaut correspond à trois branches et chaque cas a pour probabilité $0{,}75^2\times 0{,}25$

$p(F)=3\times 0{,}75^2\times O{,}25=0{,}421875$

$p(F)\simeq 0{,}42$ au centième près.

2_ L'évènement contraire de l'évènement *G*, « au moins une des trois pièces est sans défaut », est « les trois pièces ont un défaut ».

$p(\overline{G})=0{,}25^3$ donc $p(G)=1-0{,}25^3=0{,}984375$

$p(G)\simeq 0{,}98$ au centième près.

Exercice 3 6 points
Commun à tous les candidats.