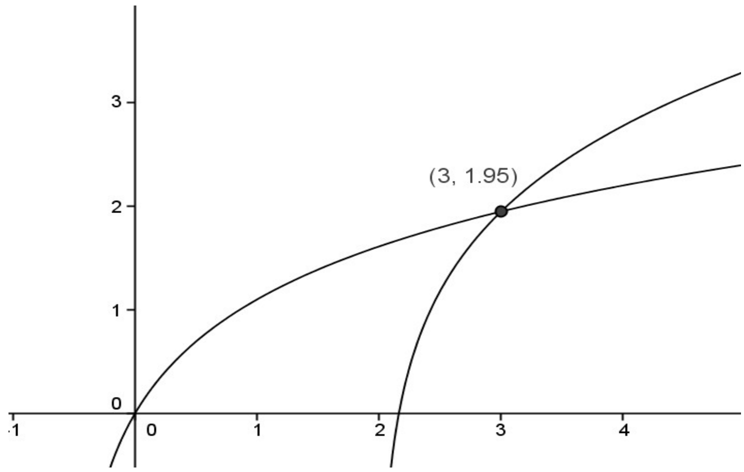
Exercice 1 Q.C.M. 4 points
Commun tous les candidats

1_ Dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1)$ admet une solution unique.
Réponse B.

Graphiquement. On trace les courbes de *f* et *g* définies par $f(x)=\ln(x+4)+\ln(x-2)$ et $g(x)=\ln(2x+1)$



Attention au calcul, si vous le faites. On résout une équation donc on va trouver des candidats et non des solutions. ***Il faut vérifier ces candidats dans l'équation de départ***.

$$\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1)$$
$$\ln(x+4)(x-2)=\ln(2x+1)$$
$$(x+4)(x-2)=2x+1$$
$$x^2+2x-8-2x-1=0$$
$$x^2-9=0$$
$$(x-3)(x+3)=0$$
$$x=-3 \text{ ou } x=3$$

On vérifie : $\ln(-3+4)+\ln(-3-2)$ n'ai pas défini. -3 n'est pas une solution.
$\ln(3+4)+\ln(3-2)=\ln(7)=\ln(2\times 3+1)$

$S=\{3\}$ donc il y a une seule solution.

2_ La fonction *f* est une primitive de la fonction *g* est la seule réponse plausible.
Réponse C.

f est décroissante sur [0 ; 4] puis croissante alors que *g* est décroissante sur [0 ; 2] puis croissante. On élimine la réponse A.

La dérivée de *g* change de signe en 2. On élimine la réponse B et il reste C.

3_ La fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc ln *f* est définie sur $\mathbb{R}$
Réponse C.

Si ln *f*(*x*) tend vers 1 alors *f*(*x*) tend vers e, on élimine A.

La fonction ln *f* est définie sur tout $\mathbb{R}$, *f* admet une limite positive (ou nulle) en $-\infty$ donc ln *f* admet une limite $-\infty$, on élimine B.

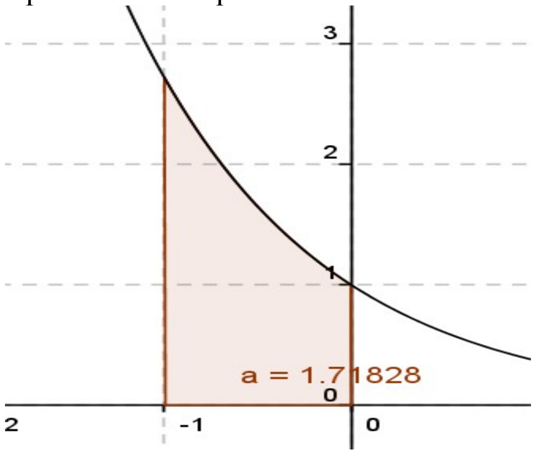
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\\ \lim\limits_{u\to0}\ln u=-\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(f(x))=-\infty$$

4_ Un calcul approché (sur la calculatrice) de $\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}dx$ donne 1,71828 donc elle vaut e – 1.

Réponse A.

$\mathrm{e}^{-x}>0$ et -1 < 0 donc $\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}dx>0$. On élimine B.

Si on ne sait pas calculer l'intégrale, on peut majorer sa valeur en comptant les carreaux. On voit bien que l'aire est majorée par 3 et même par 2. 1 + e > 3 donc on élimine C.



Exercice 2 Probabilités. 5 points
Commun tous les candidats

Les chemisiers présentent deux types de défauts :

4% présentent un défaut de coloris, événement *C*,
3% présentent ont un bouton manquant, événement *B*.
2% présentent les deux défauts, événement $C\cap B$.

1_ Une cliente choisi un chemisier au hasard.

D est l'évènement « le chemisier a au moins un défaut » donc $D=C\cup B$.
$p(D)=p(C\cup B)=p(C)+p(B)-p(C\cap B)=0{,}05$

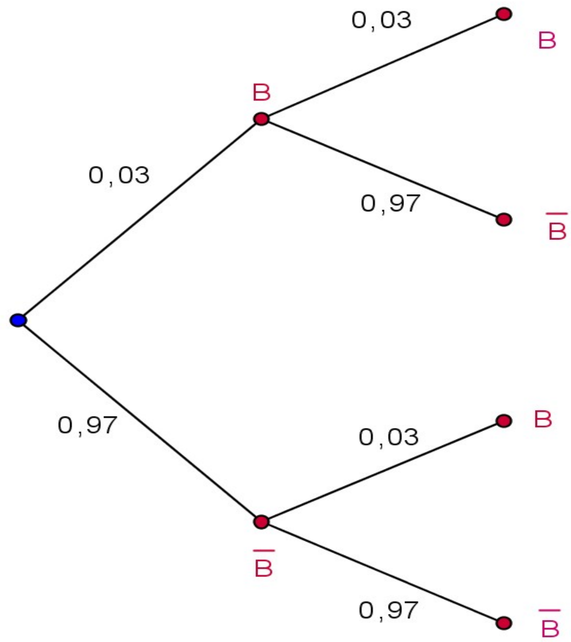
E est l'évènement « le chemisier a un seul défaut » donc $E=D-(C\cap B)$.
$p(E)=p(D)-p(C\cap B)=0{,}03$

F est l'évènement « le chemisier est sans défaut » donc $F=\overline{D}$
$p(F)=1-p(D)=0{,}95$

2_ $p_C(B)=\dfrac{p(B\cap C)}{p(C)}=\dfrac{0{,}02}{0{,}04}=\dfrac{1}{2}$

Le chemisier à un défaut de coloris, la probabilité qu'il manque un bouton est 0,5.

3_ Une autre cliente prend au hasard deux chemisiers. Ces choix sont assimilés à des tirages avec remise et on considère l'évènement « il manque un bouton » donc la probabilité suit une loi binomiale.



G est l 'événement « un seul chemisier a un bouton manquant ».

$$p(G)=2\times 0{,}03\times 0{,}97=0{,}0582$$

4_ a_ Un chemisier sans défaut est vendu 40 €. On fait une remise de 20% si le chemisier a un défaut et 50% s'il en a deux.

Le prix X prend les valeurs 20, 32 et 40.

$p(X=20)=p(B\cap C)$ $p(X=32)=p(E)$ $p(X=32)=p(F)$

Loi de probabilité de X.

X_i	20	32	40	Total
p_i	0,02	0,03	0,95	1

4_b_ Chiffre d'affaire.

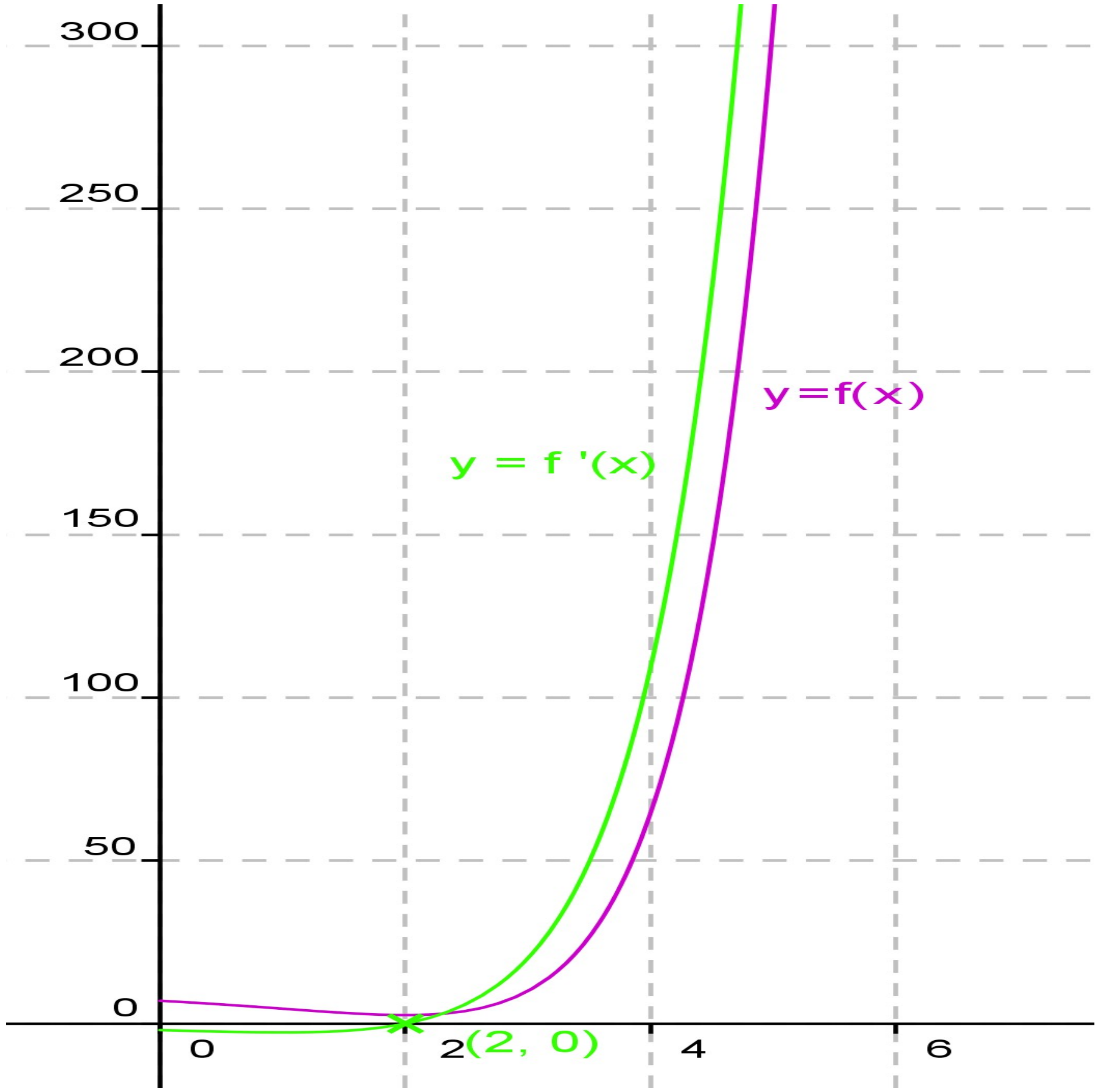
Espérance mathématique.

X_i	20	32	40	Total
p_i	0,02	0,03	0,95	1
$X_i p_i$	0,4	0,96	38	39,36

Le chiffre d'affaire moyen pour une vente est l'espérance mathématique donc 39,36 €.
Le propriétaire peut espérer un chiffre d'affaire de 3 936 € sur la vente de 100 chemisiers.

Exercice 3 ***6 points***
Commun à tous les candidats.

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=10+(x-3)\mathrm{e}^x$



La courbe de f et de sa dérivée.

Partie A

1_a_ Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 10=10\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-3=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

1_b_ Signe de la dérivée.

Modèle : $(uv)'=u'v+uv'$
$u(x)=x-3$ $\quad\quad u'(x)=1$
$v(x)=\mathrm{e}^x$ $\quad\quad v'(x)=\mathrm{e}^x$

$f'(x)=(10)'+\left((x-3)\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x+(x-3)\mathrm{e}^x=(1+x-3)\mathrm{e}^x$
$f'(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$

$\mathrm{e}^x>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $x-2$.
$f'<0$ sur $[\,0\,;2\,[$ et $f'>0$ sur $]2\,;+\infty[$

1_c_ Tableau de variations.

x	0		2		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f (x)	7	↘	$10-\mathrm{e}^2$	↗	$+\infty$

1_d_ Le minimum de f sur $[0\,;+\infty[$ est $10-\mathrm{e}^2>0$ donc $f>0$ sur $[0\,;+\infty[$

2_ Les fonctions G et g sont définies sur $[0\,;+\infty[$ par $G(x)=(x-4)\mathrm{e}^x$ et $g(x)=(x-3)\mathrm{e}^x$

2_a_ Primitive de g.

$G'(x)=\left((x-4)\mathrm{e}^x\right)'=(x-4)'\mathrm{e}^x+(x-4)(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+(x-4)\mathrm{e}^x=(1+x-4)\mathrm{e}^x$
$G'(x)=(x-3)\mathrm{e}^x=g(x)$ donc G est une primitive de g sur $[0\,;+\infty[$

2_b_ Primitive de f

$f(x)=10+g(x)$ donc une primitive de f est la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$F(x)=10x+(x-4)\mathrm{e}^x$$

3_b_ Variations de F.
$f>0$ sur $[0\,;+\infty[$ donc F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$

Partie B

La fonction f est le coût marginal de production en k€. x est le produit en tonne, $x\in[0\,;4]$

1_ Les coûts fixes s'élèvent à 200 k€.
Le coût total, C, est une primitive du coût marginal donc :

$$C(x)=F(x)+k \text{ et } C(0)=200$$

$$F(0)+k=200$$
$$-4+k=200$$
$$k=204$$

Le coût total, *C*, est définie sur [0 ; 4] par $C(x)=10x+(x-4)\mathrm{e}^{x}+204$

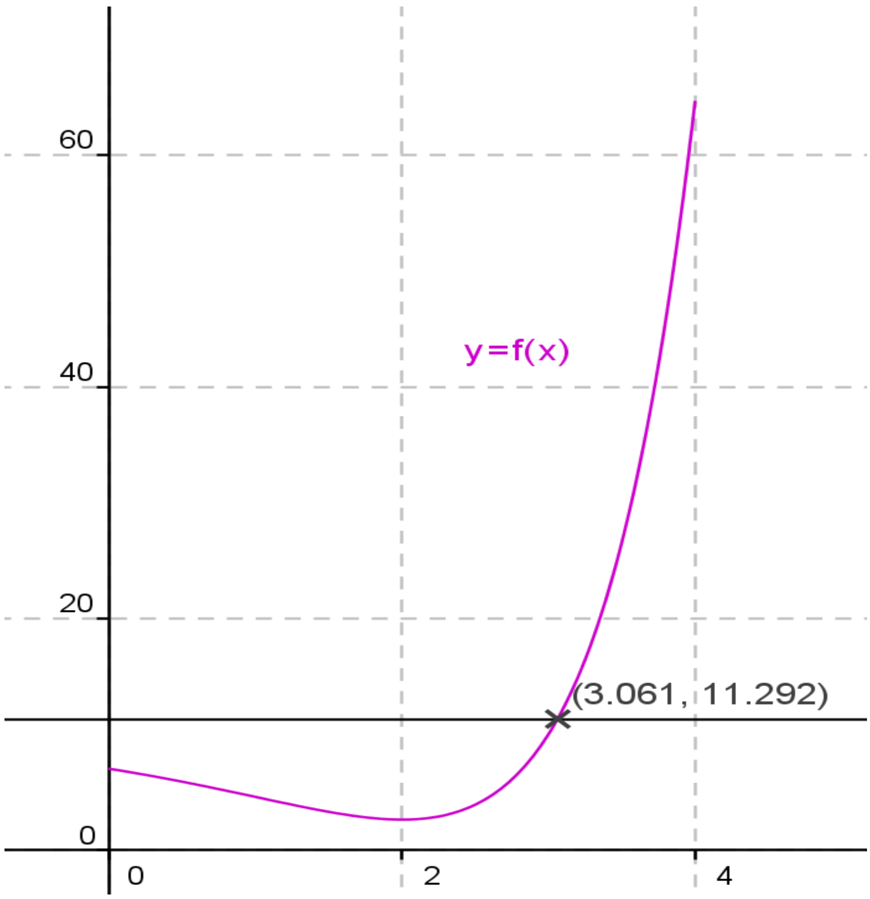
2_ L'entreprise veut atteindre un coût marginal de 11 292 €.

2_a_ Peut-on atteindre cet objectif ?
Pour qu'il soit atteint, il faut que l'équation $f(x)=11{,}292$ admette une solution sur [0 ; 4].

D'après le tableau de variations de *f* :
la fonction est majorée par sur [0 ; 2] donc l'équation n'a pas de solution;
Sur [2 ; 4], la fonction est continue et strictement croissante, $f(2)=10-\mathrm{e}^{2}<11{,}292$ et $f(4)=10+\mathrm{e}^{4}>11{,}292$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=11{,}292$ admet une unique solution x_0 sur l'intervalle [2 ; 4].

Donc il est possible d'atteindre un coût marginal de 11 292 €.

On peut aussi, raisonner graphiquement, il faut alors tracer la courbe et la droite d'équation $y=11{,}292$



Les deux courbes ont un point d'intersection unique sur [0 ; 4] donc il est possible d'atteindre un coût marginal de 11 292 € pour une valeur de x_0 de [0 ; 4].

2_b_ $f(3{,}06) \simeq 11{,}28$ et $f(3{,}065) \simeq 11.39$ donc $3{,}06 < x_0 < 3{,}065$

Il faut une production d'environ 3 060 kg, à 10 kg près, pour obtenir un coût marginal de 11 292 €.

2_b_ Pour cette production le coût moyen est de 70 115 €.

$$\frac{C(x_0)}{x_0} \simeq 70{,}115$$

Exercice 4 5 points
Commun à tous les candidats.

La tableau de l'évolution de l'énergie éolienne en France en milliers de tonnes d'équivalent pétrole (ktep et non Ktep comme dans l'énoncé). Source : INSEE avril 2008.

Année	2000	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	0	2	3	4	5	6	7
Production y_i	7	23	34	51	83	188	348

1_a_ Augmentation sur la période [2000 ; 2007]

Le coefficient multiplicateur est $\frac{348}{7} \simeq 49{,}7143$

$k = 1 + \frac{t}{100}$ donc $t = 100(k-1)$ et $t \simeq 4871$

La production a augmenté de 4871 % de 2000 à 2007.

On peut aussi faire un tableau de proportions :

Augmentation	341	t
Base	7	100

$t = \frac{341 \times 100}{7} \simeq 4871{,}43$

La production a augmenté de 4871 % de 2000 à 2007.

1_b_ Calcul du taux de croissance moyen.

Chaque année la production est multipliée par le coefficient multiplicateur moyen k_m donc en 7 ans la production est multipliée par k_m^7

$$k_m^7 = \frac{348}{7}$$

$$k_m = \sqrt[7]{\frac{348}{7}}$$

La statistique est vraiment une science inexacte, je trouve 1,74725 donc une augmentation moyenne de 74,73 %

Il faut en fait calculer avec la valeur approchée trouvée au 1_a, c'est vraiment pas mathématique donc je recommence.

$$k_m^7 = 49{,}71$$

$$k_m = \sqrt[7]{49{,}71}$$
$$k_m \simeq 1{,}74723$$
$$k_m = 1 + \frac{t_m}{100} \text{ donc } t_m = 100(k-1) \text{ et } t_m \simeq 74{,}72$$

Le pourcentage moyen d'augmentation annuel est de 74,72 % (pour faire plaisir aux auteurs du sujet et avoir une bonne note au baccalauréat)

Remarque. Ici, on modélise la suite des productions annuelles est par une suite géométrique de raison $q = k_m$ donc on considère que la croissance est exponentielle. Voir le cours sur le site.

1_c_ Production théorique en 2005.

$y_5 = 1{,}7472^5 \times 7 \simeq 113{,}98$
L'erreur commise est $113{,}98 - 83 = 30{,}98$

Le taux de pourcentage d'erreur est :

$$t = \frac{30{,}98 \times 100}{83} \simeq 37{,}33$$

On commet une erreur de 37,33 %.

2_ Ajustement exponentiel.

2_a $z = \ln y$

Année	2000	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	0	2	3	4	5	6	7
$z_i = ln\, y_i$	1,95	3,14	3,53	3,93	4,42	5,24	5,85

2_b Droite de régression affine de z en x.

$z = 0{,}54\,x + 1{,}92$

2_c Ajustement exponentiel.

$\ln y = 0{,}54\,x + 1{,}92$
$y = \mathrm{e}^{0{,}54\,x + 1{,}92}$
$y = \mathrm{e}^{0{,}54\,x}\mathrm{e}^{1{,}92}$
$y = \mathrm{e}^{1{,}92} \times \left(\mathrm{e}^{0{,}54}\right)^x$

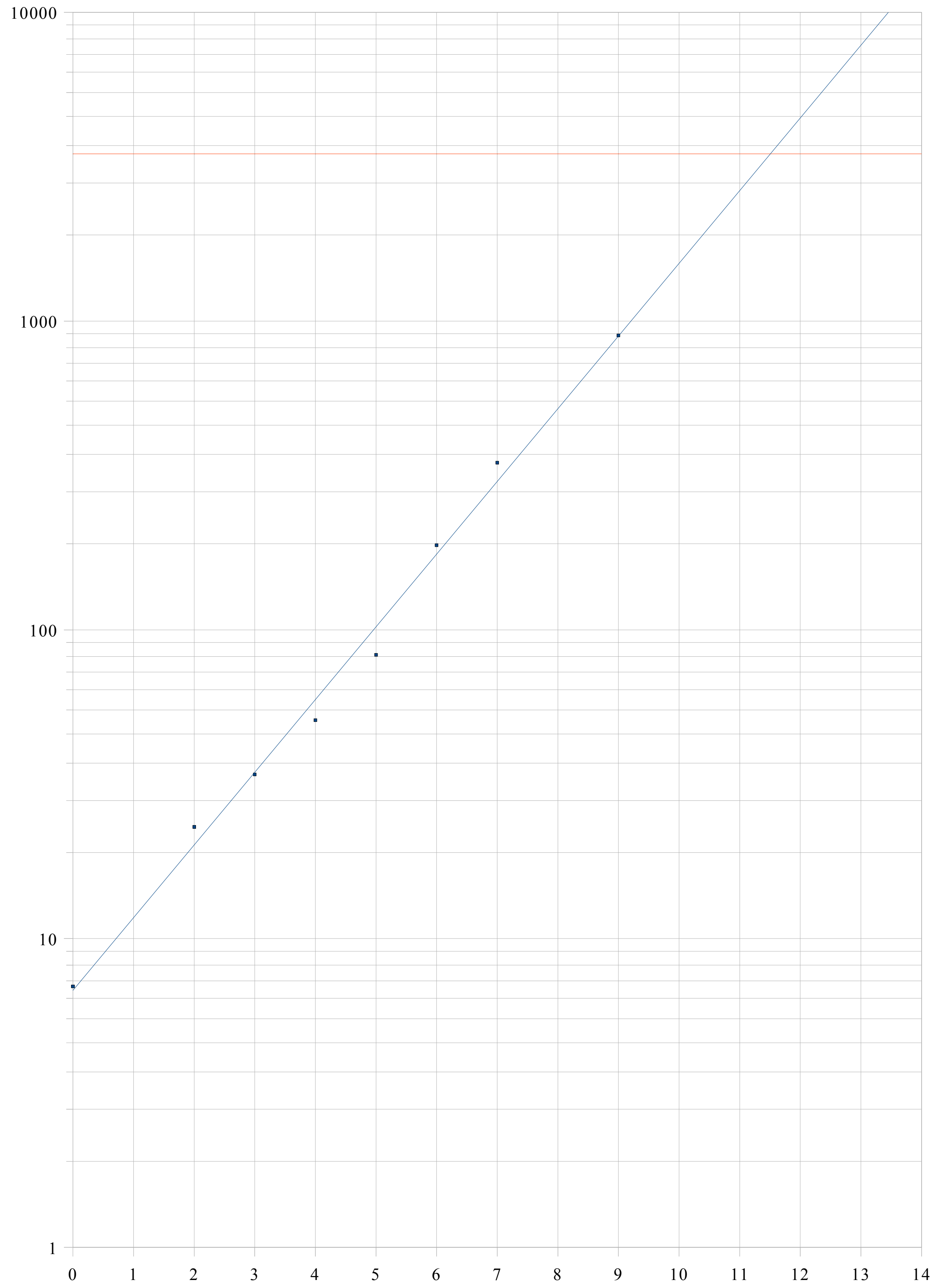
$\mathrm{e}^{1{,}92} \simeq 6{,}82$ et $\mathrm{e}^{0{,}54} \simeq 1{,}72$ donc $y = 6{,}82 \times 1{,}72^x$ (précision au centième).

2_d Production théorique en 2005

$y = 6{,}82 \times 1{,}72^5 \simeq 103$ à l'unité près.

3_a_ Graphiquement, la production prévue en 2009 sera de 900 ktep.

3_b_ La production de 2007 est plus que multipliée par 10, à partir de 2012. Il faut lire l'antécédent de 3 500, entre la $3^{\text{ième}}$ et $4^{\text{ième}}$ ligne à partir de 1000 (droite rouge, y = 3480)


10000
1000
100
10
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14

Exercice 4 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

x est le temps de travail en heures, y est le temps de location de matériel en heures.

La fonction f représente la surface du jardin en centaines de m² pour $0 \leqslant x \leqslant 120$ et $0 \leqslant y \leqslant 100$:

$$f(x\ ;\ y) = \sqrt{2xy}$$

1_a_ Coordonnées.

$f(20\ ;\ 40) = \sqrt{2 \times 20 \times 40} = 40$ donc $A(20\ ;\ 40\ ;\ 40)$. On peut vérifier sur le graphique 2.

$f(60\ ;\ y_B) = 60$
$\sqrt{120\, y_B} = 60$
$120\, y_B = 60^2$
$y_B = 30$ donc $B(60\ ;\ 30\ ;\ 60)$. On peut vérifier sur les graphique 1 et 2.

1_b_ Les coordonnées de C sont (90 ; 20 ; 60). On peut vérifier par le calcul et sur le graphique 2.

Pour un jardin de 6 000 m² il faut 90 heures de travail et 20 heures de location de matériel.

1_c Point D(10 ; 80 ; 40). Voir la figure (si je la fais).

1_d Courbe de niveau z = 50.

$f(x\ ;\ y) = 50$
$\sqrt{2xy} = 50$
$2xy = 50^2$
$y = \dfrac{1250}{x}$ donc la courbe de niveau z = 50 est une hyperbole.

2_ Une heure de travail coûte 15 € donc x heures coûtent 50 x €.
Une heure de location coûte 30 € donc y heures coûtent 50 y €.

2_a_ Le coût hebdomadaire est fixé à 2 400 € donc $15x + 30y = 2\,400$
$x + 2y = 160$
$2y = -x + 160$
$y = -\dfrac{1}{2}x + 80$

2_b L'ensemble E d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 80$ est un plan vertical de vecteur normal $\vec{n}(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$ qui passe par les points F(0 ; 80 ; 0) et G(120 ; 20 ; 0)

2_c La représentation de E sur la figure 2. est la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 80$

2_d Graphiquement, le point de la droite qui correspond au maximum de z semble être le point de coordonnées (80 ; 40) qui correspond à une surface de maximum $8\,000$ m² pour un coût de 2 400 €.

3_a_ Attention ici, il y a une erreur dans l'énoncé, rectifier par :

$$g(x)=\sqrt{160x-x^2}$$

Sous la contrainte $y=-\frac{1}{2}x+80$ z est égal à :

$z=\sqrt{2x\left(-\frac{1}{2}x+80\right)}$

$z=\sqrt{160x-x^2}$

$z=g(x)$ où *g* est définie sur [0 ; 120] par :

$$g(x)=\sqrt{160x-x^2}$$

3_b Dérivée de g.

Modèle : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$u(x)=160x-x^2$ $\qquad u'(x)=160-2x$

$g'(x)=\frac{160-2x}{2\sqrt{160x-x^2}}=\frac{2(80-x)}{2\sqrt{160x-x^2}}$

$g'(x)=\frac{80-x}{\sqrt{160x-x^2}}$

Si *g* admet un maximum en x_0 de [0 ; 120] alors $g'(x_0)=0$

$\frac{80-x}{\sqrt{160x-x^2}}=0$

$80-x=0$

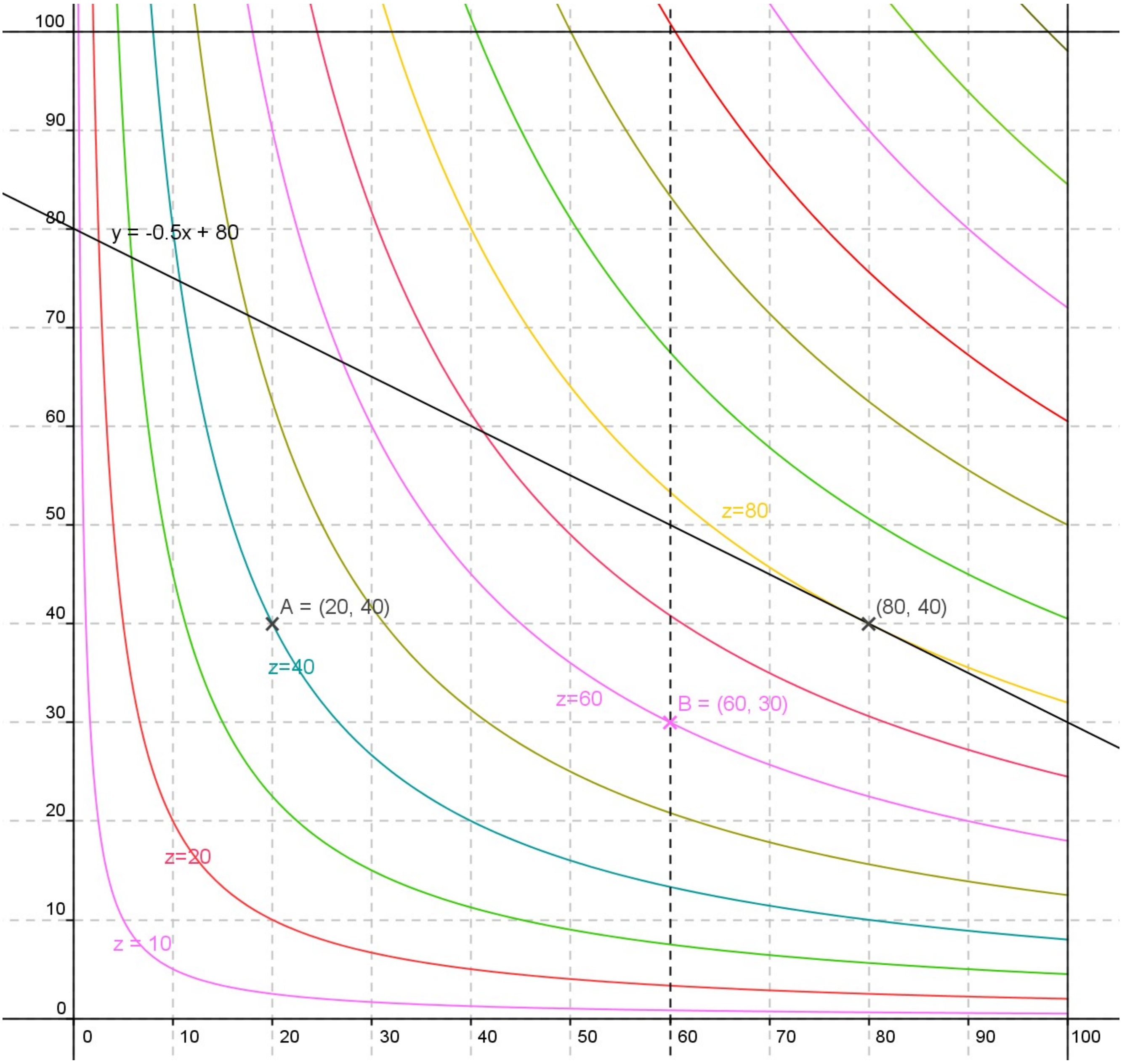
$x=80$

$g'(x)$ a le même signe que 80 – *x* donc est positif sur [0 ; 80] et négatif sur [80 ; 120] et $x_0=80$ correspond bien à un maximum de *g*.

3_c Pour *x* = 80, *y* = 40 et $g(80)=f(80\ ;\ 40)=80$.

Pour un coût de 2 400 €, on peut traiter une surface maximum de 8 000 m² en 80 heures de travail et 40 heures de location de matériel.

Figure n°2


y = -0.5x + 80
z=80
A = (20, 40)
(80, 40)
z=40
z=60
B = (60, 30)
z=20
z = 10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100