Majorant, minorant, maximum, minimum.

On travaille dans l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre inférieur, $\leqslant$. *F* est un sous-ensemble, ou une partie, de $\mathbb{R}$. $F \subset \mathbb{R}$.

I Majorant et minorant.

On travaille dans l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre inférieur, $\leqslant$. *F* est un sous-ensemble, ou une partie, de $\mathbb{R}$. $F \subset \mathbb{R}$.

1 Définitions.

Un réel *M* est un majorant de *F* signifie que pour tout *y* de *F*, $y \leqslant M$.
Un réel *m* est un minorant de *F* signifie que pour tout *y* de *F*, $m \leqslant y$.

Remarque. En général, *M* et *m*, si ils existent, ne sont pas des éléments de *F*.

2 Exemples.

a L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ n'est pas majorée mais est minorée.

Démonstration.

0, -0,5 , -2 et tous les réels négatifs sont des minorants de $\mathbb{N}$.

Montrons que $\mathbb{N}$ n'est pas majorée.
Dans $\mathbb{R}$ tout nombre *M* peut être encadré par deux entiers consécutifs *n* et *n*+1 tels que :
$n \leqslant M < n+1$ (Remarquez bien l'inégalité strict à droite et large à gauche)
n est appelé la partie entière de *M*, on la note $E(M)$.
$(E(3{,}2)=3,\ E(7{,}99999)=7,\ E(4)=4,\ E(-10)=-10$ mais $E(-5{,}1)=-6)$
Un majorant de $\mathbb{N}$, si il existe, est positif.
Quelque soit *M* un réel positif, aussi grand que l'on veut, $M < E(M)+1 \in \mathbb{N}$ donc *M* n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N}$ n'est pas majorée.

b L'intervalle $[a\ ;\ b[,\ a \geqslant b,$ est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.

Démonstration.

Par définition d'un intervalle, $[a\ ;\ b[=\{, x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$. Donc *a* est un minorant de $[a\ ;\ b[$ et *b* est un majorant de $[a\ ;\ b[$.

Remarques.
a appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b[$, *a* est le minimum de $[a\ ;\ b[$.
b n'appartient pas à l'intervalle $[a\ ;\ b[$, $[a\ ;\ b[$ n'a pas de maximum.
(On verra les définitions de maximum et de minimum dans le paragraphe II)

3 Propriétés.

Si M est un majorant de F alors tout réel $N \geqslant M$ est un majorant de F.
Si m est un minorant de F alors tout réel $n \leqslant m$ est un minorant de F.

Démonstration évidente.

4 Exemples.

a Tous les réels négatifs sont des minorants de $\mathbb{N}$. L'ensemble des minorants de $\mathbb{N}$ est l'intervalle $]-\infty \ ; \ 0]$.

b Tous les réels inférieurs à a sont des minorants de $[a \ ; \ b[$. L'ensemble des minorants de $[a \ ; \ b[$ est l'intervalle $]-\infty \ ; \ a]$.
Tous les réels supérieurs à b sont des majorants de $[a \ ; \ b[$. L'ensemble des majorants de $[a \ ; \ b[$ est l'intervalle $[b \ ; \ +\infty[$.

II Maximum et minimum.

1 Définitions.

Un réel M est le maximum de F signifie que M appartient à F et que pour tout y de F, $y \leqslant M$.
Un réel m est un minorant de F signifie que m appartient à F que pour tout y de F, $m \leqslant y$.
Un extremum est un maximum ou un minimum.

Remarques. Le *maximum M* , si il existe, est un majorant de F.
Le *minimum m* , si il existe, est un minorant de F.
Les réciproques sont fausses.

2 Exemples.

a L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ a pour minimum 0.

Démonstration.

0 est un minorant et 0 appartient à $\mathbb{N}$.

b L'intervalle $[a \ ; \ b[, \ a \geqslant b,$ a pour minimum a, il n'a pas de maximum.

Démonstration.

On a vu que a est un minorant de $[a \ ; \ b[$ et a appartient à $[a \ ; \ b[$.

Le maximum M, si il existe, appartient à l'intervalle $[a \ ; \ b[$ donc $a \leqslant M < b$.
Le « milieu » de l'intervalle $[M \ ; \ b[$ est le réel $\dfrac{M+b}{2}$ (milieu correspond à moyenne)
$M < b$ donc $M = \dfrac{2M}{2} < \dfrac{M+b}{2} < \dfrac{2b}{2} = b$ et $\dfrac{M+b}{2}$ appartient à $[a \ ; \ b[$ donc M n'est pas le maximum.

3 Propriétés.

Le maximum, quand il existe est unique. C'est le seul majorant qui appartient à F.
Le minimum, quand il existe est unique. C'est le seul minorant qui appartient à F.

Démonstration.

Soit M_1 et M_2 deux maxima de F (le pluriel de maximum est maxima, on peut aussi écrire maximums).
M_1 appartient à F et M_2 est un majorant donc $M_1 \leqslant M_2$.
De même, M_2 appartient à F et M_1 est un majorant donc $M_2 \leqslant M_1$.
$\left.\begin{matrix} M_1 \leqslant M_2 \\ M_2 \leqslant M_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M_1 = M_2$ donc le maximum est unique.

On démontre de même que le minimum est unique.

III Application aux fonctions réelles à variables réelles.

f est une fonction, son ensemble de définition est noté D_f.

1 Définition.

Soit $I \subset D_f$.
On appelle « image de *I* » l'ensemble :
$$F = \{ f(x), x \in I \}$$
On peut noter cet ensemble $f(I)$.

2 Exemples.

L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction carré est $[0\ ;\ +\infty[$.
L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction sinus est $[-1\ ;\ 1]$.

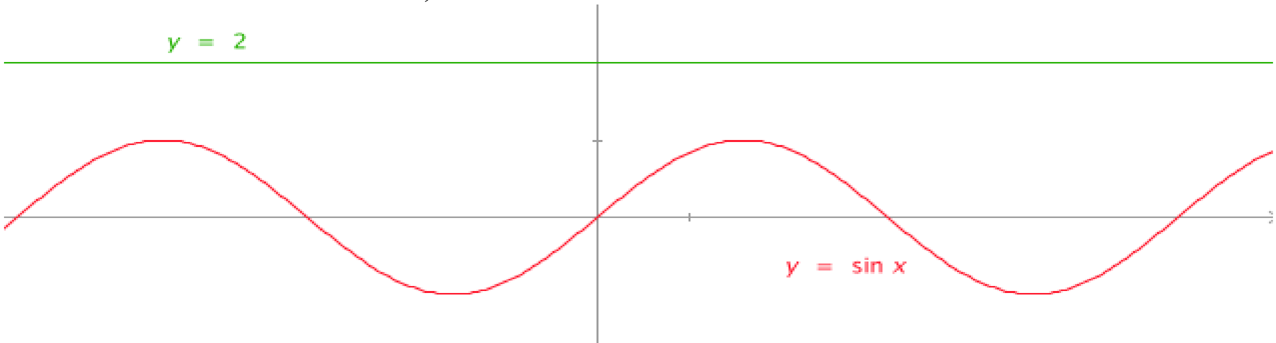
3 Fonction majorée, minorée, bornée.

Définition 1.

La fonction *f* est majorée sur $I \subset D_f$ signifie que $f(I)$ est majorée.
Il existe un réel *M* tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$

Exemple 1.

La fonction sinus est majorée sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \leqslant 2$



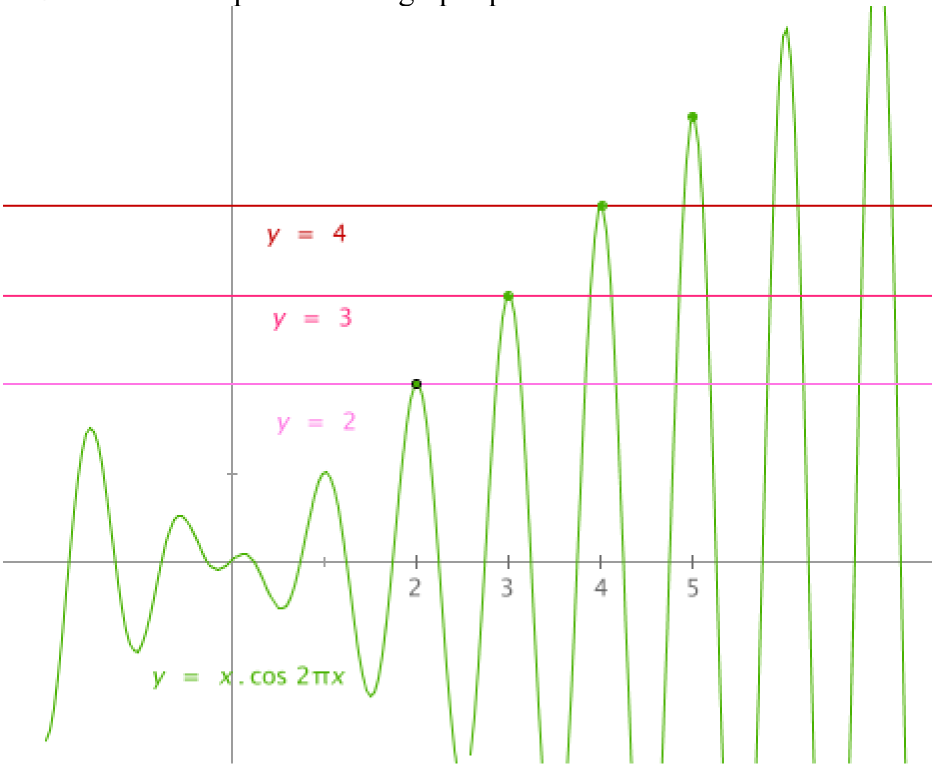
Sur le graphique, tous les points de la courbe sont en dessous de la droite d'équation, $y = 2$.

Exemple 2. Le contraire de majorée.

La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \rightarrow x\cos(2\pi x)$ n'est pas majorée.

Il faut démontrer le contraire de la proposition « il existe un réel *M* tel que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ » donc « il n'existe pas de réel *M* tel que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ » donc « quel que soit le réel *M*, aussi grand que l'on veut, il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) > M$ »

Observons la représentation graphique.



2, 3 et 4 ne sont pas des majorants. D'après l'allure du graphique, on conjecture que la fonction n'est pas majorée.

On remarque que $f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=4$. Calculons $f(n),\ n \in \mathbb{Z}$.

La fonction cosinus est périodique de période 2π : $\cos(2\pi n)=\cos 0=1$

$f(n)=n\cos(2\pi n)=n$

Démontrons que *f* n'est pas majorée.

Soit *M* un nombre réel quelconque, on note $E(M)$ sa partie entière :

$$E(M) \leqslant M < E(M)+1=n,\ n \in \mathbb{Z}$$

$f(n)=n$ donc $M < f(n)$ et *M* n'est pas un majorant.

On a choisi *M* quelconque donc cette relation est vraie pour tout *M* réel.

La fonction *f* n'est pas majorée.

Définition 2.

La fonction *f* est minorée sur $I \subset D_f$ signifie que $f(I)$ est minorée.

Il existe un réel *m* tel que pour tout $x \in I,\ f(x) \geqslant m$

Exemple 3.

La fonction carré est minorée.

Pour tout $x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant -1$

Définition 3.

La fonction *f* est bornée sur $I \subset D_f$ signifie que $f(I)$ est bornée.
Il existe un réel *m* et un réel *M* tel que pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Exemple 4.

La fonction sinus est bornée.

3 Maximum, minimum d'une fonction.

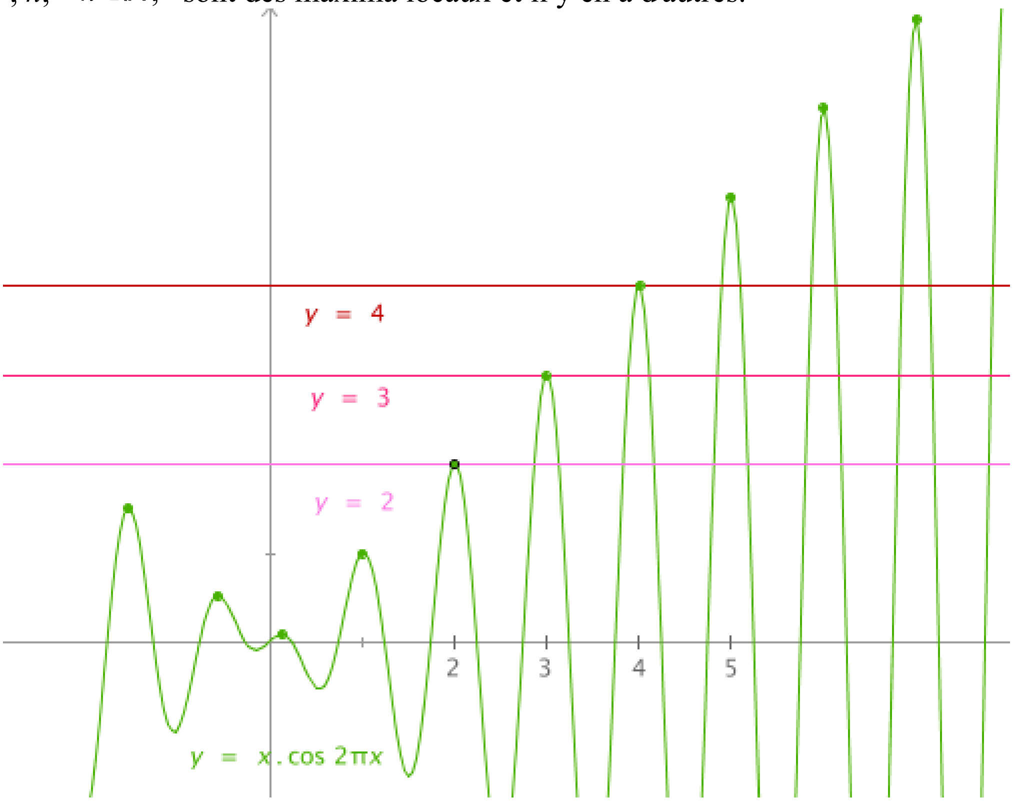
Définition 1.

M est un maximum relatif ou local de *f* atteint en *a* s'il existe un intervalle *I* de D_f contenant *a* tel que *M* soit le maximum de $f(I)$.

$f(a)=M$, $a \in I \subset D_f$, et pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$.

Exemple 1.

La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \to x\cos(2\pi x)$ admet une infinité de maxima locaux.2, 3, 4, ... , *n*, $n \in \mathbb{N}$, sont des maxima locaux et il y en a d'autres.



Définition 2.

M est un maximum absolu ou global de *f* atteint en *a* si *M* est le maximum $f(D_f)$.

$f(a)=M$, $a \in I \subset D_f$, et pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$.

Remarque.

Un maximum absolu est aussi un maximum relatif.

Exemple 2.

La fonction de l'exemple 1 n'a pas de maximum absolu.

Démonstration.
On a vu qu'elle n'était pas majorée.

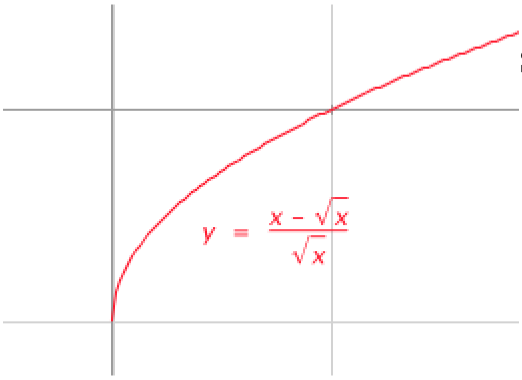
Définition 1.

m est un minimum relatif ou local de f atteint en a s'il existe un intervalle I de D_f contenant a tel que m soit le maximum de $f(I)$.

$f(a)=M$, $a\in I\subset D_f$, et pour tout $x\in I$, $f(x)\leqslant M$.

Exemple 3.

La fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f\ :\ x\ \rightarrow\ \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ est minorée par -1 mais n'a pas de minimum.



Démonstration.
Simplifions l'écriture de $f(x)$:

$$f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$x>0\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\sqrt{x}-1$$

<u>Attention, la fonction f est définie pour $x>0$ et pas en 0 alors que la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{x}-1$ a pour ensemble de définition $[0\ ;\ +\infty[$.</u>

$$\boxed{f\neq g\ \text{ mais }\ f(x)=g(x)\ \text{ sur }\ D_f}$$

$x>0\ \Rightarrow\ \sqrt{x}>0\ \Rightarrow\ f(x)>-1$ donc f est minorée.

Supposons que m soit un minimum atteint en a, $f(a)=m$.

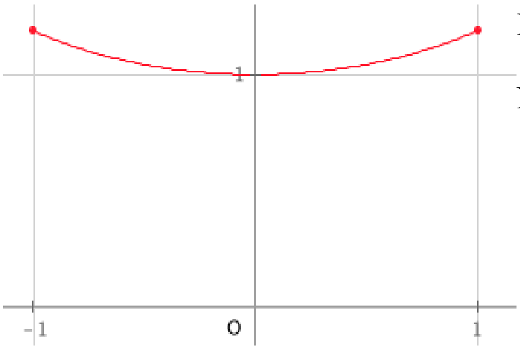
$a\in D_f$ donc $a>0$ donc $\dfrac{a}{2}>0$ et $\dfrac{a}{2}\in D_f$.

La fonction racine carrée est strictement croissante donc f est strictement croissante.

$\dfrac{a}{2}<a\ \Rightarrow\ f\left(\dfrac{a}{2}\right)<f(a)=m$ ce qui contredit l'hypothèse. f n'a pas de minimum.

Exemple 4.

Si vous trouvez l'exemple 3 tiré par les cheveux, regardez la fonction f définie sur $I=[-1\ ;\ 0[\cup]0\,;\,1]$ par $x\ \rightarrow\ \dfrac{x}{\sin x}$.



La fonction est minorée par 1 mais n'a pas de minimum.

Nous n'avons pas les outils pour démontrer ces résultats.