Taux de variation d'une fonction.

I Définition.

1 Première écriture du taux de variation.

La fonction *f* est définie sur l'intervalle *I*. $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$.

Le taux de variation de *f* entre x_1 et x_2 est :

$$\tau = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2 Interprétation géométrique.

Soit les points $M(x_1 ; f(x_1))$ et $N(x_2 ; f(x_2))$, le taux de variation est le coefficient directeur de la droite (MN), nommée sécante.

Voir le graphique du cours : Ordre et variations d'une fonction.

3 Exemple.

Soit *f* la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$.

$$\tau = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$$

II Application.

Le signe du taux de variation indique le sens de variation de *f*.

1 Théorème.

Soit $x_1 \neq x_2$.

Si pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $\tau \leqslant 0$ alors *f* est décroissante sur *I*.

Si pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $\tau \geqslant 0$ alors *f* est croissante sur *I*.

Si pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $\tau < 0$ alors *f* est strictement décroissante sur *I*.

Si pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $\tau > 0$ alors *f* est strictement croissante sur *I*.

Si pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $\tau = 0$ alors *f* est constante sur *I*

Démonstration

Première proposition.

$\tau \leqslant 0$ donc $f(x_2) - f(x_1)$ et $x_2 - x_1$ sont de signes opposés.

Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

f est décroissante sur *I*.

On démontre de même les autres propositions.

2 Exemple.

Soit *f* la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$, on a vu que $\tau = x_2 + x_1$

$x_1 \neq x_2$ donc si l'un des x_i est nul l'autre n'est pas nul.

Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in \mathbb{R}^+$, $x_2 \in \mathbb{R}^+$, $\tau > 0$ donc *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in \mathbb{R}^-$, $x_2 \in \mathbb{R}^-$, $\tau < 0$ donc *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

3 Inconvénients et nouvelle méthode.

Le taux de variation est une fonction à deux variables, x_1 et x_2, et il n'est pas facile de déterminer les intervalles où le taux a un signe constant. Dans un prochain chapitre, on va définir le nombre dérivé et la fonction dérivée, fonction a une seule variable. Ces notions se déduisent du taux de variation mais il faut se servir des limites qu'on n'a pas encore étudier. La suite de ce cours est une première approche de ces notions. Cette approche est historique mais pas rigoureuse mathématiquement.

Newton et Leibniz sont les « inventeurs » du calcul différentiel et leurs calculs, malgré le manque de rigueur, étaient justes et cette théorie a fait faire un bond de géant à l'analyse.

III Approche de la définition du nombre dérivée.

1 Deuxième écriture du taux de variation.

La fonction *f* est définie sur l'intervalle *I.* $x_1=a\in I$, $x_2=a+h\in I$ et $h\neq 0$.

Le taux de variation de *f* entre a et $a+h$ est :

$$\tau=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2 Exemple.

Soit *f* la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$.

$$\tau=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{a^2-(a+h)^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h$$

3 Les variations peuvent être étudiées localement.

Si la fonction *f* croissante sur $[a_0;a_1]$ et sur $[a_1;a_2]$ elle est croissante sur $[a_0;a_2]$

Démonstration.

On suppose *h* positif.

Soit $(x_1;x_2)$, $x_1\in[a_0;a_2]$, $x_2\in[a_0;a_2]$, $x_1<x_2$.

Le seul cas à étudier correspond à $x_1\in[a_0;a_1]$, $x_2\in[a_1;a_2]$

f croissante sur $[a_0;a_1]$ et $x_1\leqslant a_1$ donc $f(x_1)\leqslant f(a_1)$.

f croissante sur $[a_1;a_2]$ et $a_1\leqslant x_2$ donc $f(a_1)\leqslant f(x_2)$.

D'où $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ et *f* est croissante sur $[a_0;a_2]$

On démontre de même le cas où h est négatif.

En appliquant cette propriété à n intervalles $[a_i;a_{i+1}]$ il vient :

si la fonction *f* croissante sur tous $[a_i;a_{i+1}]$ elle est croissante sur $[a_0;a_n]$.

On obtient un théorème équivalent avec *f* décroissante.

On peut toujours découper un intervalle $[\alpha;\beta]$ en *n* intervalles $[a_i;a_{i+1}]$

3 Variations de la fonction carré.

Soit *f* la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$, on a vu que $\tau=2a+h$

Si $a>0$ on pose $h=\frac{a}{2}$ et $\tau>0$ sur $[a-h;a+h]$.

Donc *f* est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Par un raisonnement analogue, *f* est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

Le signe du taux sur un intervalle assez petit contenant *a* ne dépend que de *a*.

« A la limite », pourquoi ne pas prendre *h* nul ? C'est ainsi que raisonnaient Newton et Leibniz au grand dam des mathématiciens de l'époque qui argumentaient, avec raison, que *h* ne pouvait être à la fois non nul, pour calculer le taux, et nul. Cette théorie est devenue rigoureuse le jour où la notion de limite a été correctement définie.

La limite quand *h* tend vers 0 de $2a+h$ est $2a$ est s'appelle le nombre dérivée de *f* en *a*.

On étudiera les limites dans un prochain chapitre.