Suites arithmétiques

Définition : $u_{n+1}=u_n+r$
r est la raison. (on exclut le cas $r = 0$)

Théorème : (u_n) est arithmétique si et seulement si, il existe r, un nombre constant, tel que pour tout n,
$u_{n+1}-u_n=r$

Formules générales.
$u_n=u_0+nr$ et $u_n=u_p+(n-p)r$

Variations.
Si $r>0$, (u_n) est croissante.
Si $r<0$, (u_n) est décroissante.

Représentation graphique.
Points alignés.

Croissance.
La croissance absolue $u_{n+1}-u_n=r$ est constante.

Lien entre suite arithmétique et géométrique.
Pour $q>0$
Si (u_n) est géométrique de raison q alors $v_n=\ln(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $\ln(q)$

Somme de termes consécutifs.
$$S=\frac{(premier\ terme+dernier)\times(nombre\ de\ termes)}{2}$$

Limites.
Attention, on ne peut parler de limite d'une suite qu'en plus l'infini. C'est pour ça qu'on n'a pas préciser, $n\to+\infty$.

Si $r>0$ alors $\lim u_n=+\infty$
Si $r<0$ alors $\lim u_n=-\infty$

Exemples.
Les intérêts simples (si ça existe).
Château de cartes, empilage de tuyaux.

Suites géométriques

Définition : $u_{n+1}=q\,u_n$
q est la raison. (on exclut les cas $q = -1$ ou 0 ou 1)

Théorème : (u_n) est géometrique si et seulement si, il existe q, un nombre constant, tel que pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$

Formules générales.
$u_n=u_0q^n$ et $u_n=u_pq^{n-p}$

Variations.
Si $u_0>0$
- Si $q>1$, (u_n) est croissante.
- Si $0<q<1$, (u_n) est décroissante.

Si $u_0<0$
- Si $q>1$, (u_n) est décroissante.
- Si $0<q<1$, (u_n) est croissante.

Si $q<0$, (u_n) est alternée (positif, négatif, positif, …)

Représentation graphique.
Points d'une courbe exponentielle

Croissance.
La croissance relative (taux de croissance, t%)
$$\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=\frac{qu_n-u_n}{u_n}=q-1=\frac{t}{100}$$ est constante.

Lien avec les pourcentages.
Ajouter t% c'est multiplier par $q=1+\frac{t}{100}$

Dans ce cas $q-1=\frac{t}{100}$ (t peut être négatif)

Somme de termes consécutifs.
$$S=\text{premier terme}\,\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$
En distribuant le premier terme au numérateur
$$S=\frac{\text{premier terme}-\text{terme suivant le dernier}}{1-q}$$

Limites.
Si $q>1$ et $u_0>0$ alors l $\lim u_n=+\infty$
Si $q>1$ et $u_0<0$ alors l $\lim u_n=-\infty$
Si $-1<q<1$ alors $\lim u_n=0$
Si $q<-1$ alors (u_n) n'a pas de limite.

Exemples.
Toute quantité qui varie à taux constant.
Intérêts composées.
Radio-activité.