Techniques pour déterminer l'équation d'un plan.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Un plan est défini par trois points non alignés, plan (*ABC*), ou un point et deux vecteurs non colinéaires, plan $(A;\vec{u};\vec{v})$ ou par un point et un vecteur normal non nul, plan $(A;\vec{n})$.

En posant $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, $(ABC)=(A;\vec{u};\vec{v})$

En posant $\overrightarrow{OB}=\vec{u}+\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{v}+\overrightarrow{OA}$, $(A;\vec{u};\vec{v})=(ABC)$.

I_ Equation d'un plan (ABC)(ou $(A;\vec{u};\vec{v})$).

1_ Première technique.

Ce n'est pas la plus simple sauf si on travaille avec une calculatrice de calcul formel ou du moins qui donne des résultats numériques exacts.

Modèle.

Une équation cartésienne d'un plan est de la forme $ax+by+cz=d$

Mise en équations d'inconnues *a*, *b*, *c* et *d*.

$A\in(ABC) \Rightarrow a\,x_A+b\,y_A+c\,y_A=d$

$B\in(ABC) \Rightarrow a\,x_B+b\,y_B+c\,y_B=d$

$C\in(ABC) \Rightarrow a\,x_C+b\,y_C+c\,y_C=d$

Résolution du système

$$\begin{cases} a\,x_A+b\,y_A+c\,y_A=d \\ a\,x_B+b\,y_B+c\,y_B=d \\ a\,x_C+b\,y_C+c\,y_C=d \end{cases}$$

Ce système a trois équations et quatre inconnues donc une infinité de solutions dans le cas général. C'est normal, un plan à une infinité d'équations. On va traiter une inconnue comme une constante. J'ai choisi *d* mais on peut aussi choisir une autre inconnue.

Attention, on ne peut pas, au début du calcul remplacer une inconnue par un nombre. L'inconnue peut être nulle et le calcul incohérent.

On résout le système et on choisit *d* (ce choix peut se faire avant la fin de la résolution) judicieusement afin d'obtenir une solution simple.

Pour les ES, spécialité mathématique.

Ce système s'écrit sous forme d'une équation matricielle.

On pose :

$$X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix}$$

A l'aide de la calculatrice, on calcule M^{-1} (et le déterminant de *M*, hors programme mais indispensable pour pouvoir travailler avec des matrices. On remplace *d* par le déterminant de *M*.)

La solution est $X=M^{-1}D$

1_ Deuxième technique.

C'est la plus simple et la deuxième partie permet de trouver l'équation d'un plan $(A;\vec{n})$.

Première partie. Recherche d'un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Mise en équations

$\vec{n}\perp\vec{u} \Rightarrow a\,x_{\vec{u}}+b\,y_{\vec{u}}+c\,z_{\vec{u}}=0$

$\vec{n}\perp\vec{v} \Rightarrow a\,x_{\vec{v}}+b\,y_{\vec{v}}+c\,z_{\vec{v}}=0$

Résolution du système.

$$\begin{cases}a\,x_{\vec{u}}+b\,y_{\vec{u}}+c\,z_{\vec{u}}=0\\a\,x_{\vec{v}}+b\,y_{\vec{v}}+c\,z_{\vec{v}}=0\end{cases}$$

Ce système a deux équations et trois inconnues donc une infinité de solutions dans le cas général. C'est normal, il y aune infinité de vecteurs normaux. On va traiter une inconnue comme une constante.

On résout le système et on choisit (ce choix peut se faire avant la fin de la résolution) judicieusement la valeur de l'inconnue traitée comme une constante afin d'obtenir une solution simple.

Deuxième partie. Equation de $(ABC)=(A;\vec{n})$

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(ABC) \Rightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ donc $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

II Exemple.

Soit $A\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ trois points du plan.

Montrons que ces trois points définissent un plan.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\neq k\,\overrightarrow{AC}$ donc A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan (ABC).

Première méthode.

Modèle.

Une équation cartésienne d'un plan est de la forme $ax+by+cz=d$

Mise en équations d'inconnues a, b, c et d.

$A\in(ABC) \Rightarrow 3a+2b+c=d$

$B\in(ABC) \Rightarrow a-2b+4c=d$

$C\in(ABC) \Rightarrow -a+3b+2c=d$

Résolution du système à l'aide de matrices.

$$\begin{cases} 3a+2b+c=d \\ a-2b+4c=d \\ -a+3b+2c=d \end{cases}$$

Equation matricielle

$$X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix}$$

$MX=D$

Le déterminant est -59 et $M=\begin{pmatrix} \frac{16}{59} & \frac{1}{59} & \frac{-10}{59} \\ \frac{6}{59} & \frac{-7}{59} & \frac{11}{59} \\ \frac{-1}{59} & \frac{11}{59} & \frac{8}{59} \end{pmatrix}$

On choisit $D=\begin{pmatrix} -59 \\ -59 \\ -59 \end{pmatrix}$

$$X=M^{-1}D \qquad X=\begin{pmatrix} \frac{16}{59} & \frac{1}{59} & \frac{-10}{59} \\ \frac{6}{59} & \frac{-7}{59} & \frac{11}{59} \\ \frac{-1}{59} & \frac{11}{59} & \frac{8}{59} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -59 \\ -59 \\ -59 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X=\begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Une équation de (ABC) est $-7x-10y-18z=-59$ en simplifiant $7x+10y+18z=59$

Résolution du système par la méthode d'addition.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 3a+2b+c=d \\ a-2b+4c=d \\ -a+3b+2c=d \end{cases}$$

On élimine a « entre » L_1 et L_3 puis entre L_2 et L_3

$$\begin{matrix} L_4=L_1+3L_3 \\ L_2 \\ L_5=L_2+L_3 \end{matrix}\begin{cases} 11b+7c=4d \\ a-2b+4c=d \\ b+6c=2d \end{cases}$$

On élimine b « entre » L_4 et L_5

$$\begin{matrix} L_6=L_4-11L_5 \\ L_2 \\ L_5 \end{matrix}\begin{cases} -59c=-18d \\ a-2b+4c=d \\ b+6c=2d \end{cases}$$

On choisit $d=59$

$$\begin{matrix} L_6 \\ L_2 \\ L_5 \end{matrix}\begin{cases} c=18 \\ a=2b-4\times18+59 \\ b=2\times59-6\times18 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_6 \\ L_2 \\ L_5 \end{matrix}\begin{cases} c=18 \\ a=7 \\ b=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=7 \\ b=10 \\ c=18 \end{cases}$$

Une équation de (ABC) est $7x+10y+18z=59$

Deuxième méthode.

Première partie. Recherche d'un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$

Mise en équations

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \Rightarrow -2a-4b+3c=0$

$\vec{n}\perp\vec{v} \Rightarrow -4a+b+c=0$

Résolution du système.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}2a+4b=3c\\-4a+b=-c\end{cases}$$

On traite c comme une constante.

$$\begin{matrix}L_1\\L_3=2L_1+L_2\end{matrix}\begin{cases}2a+4b=3c\\9b=5c\end{cases}$$

On choisit $c = 9$

$$\begin{matrix}L_1\\L_3\end{matrix}\begin{cases}2a=-20+27\\b=5\end{cases} \qquad \begin{cases}a=\dfrac{7}{2}\\b=5\end{cases}$$

Une solution est $\vec{n'}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\5\\9\end{pmatrix}$, une autre est $\vec{n}\begin{pmatrix}7\\10\\18\end{pmatrix}$

Deuxième partie. Equation de $(ABC)=(A;\vec{n})$

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(ABC) \Rightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$

$A\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}7\\10\\18\end{pmatrix}$ donc $7(x-3)+10(y-2)+18(z-1)=0$

Une équation de (ABC) est $7x+10y+18z-59=0$