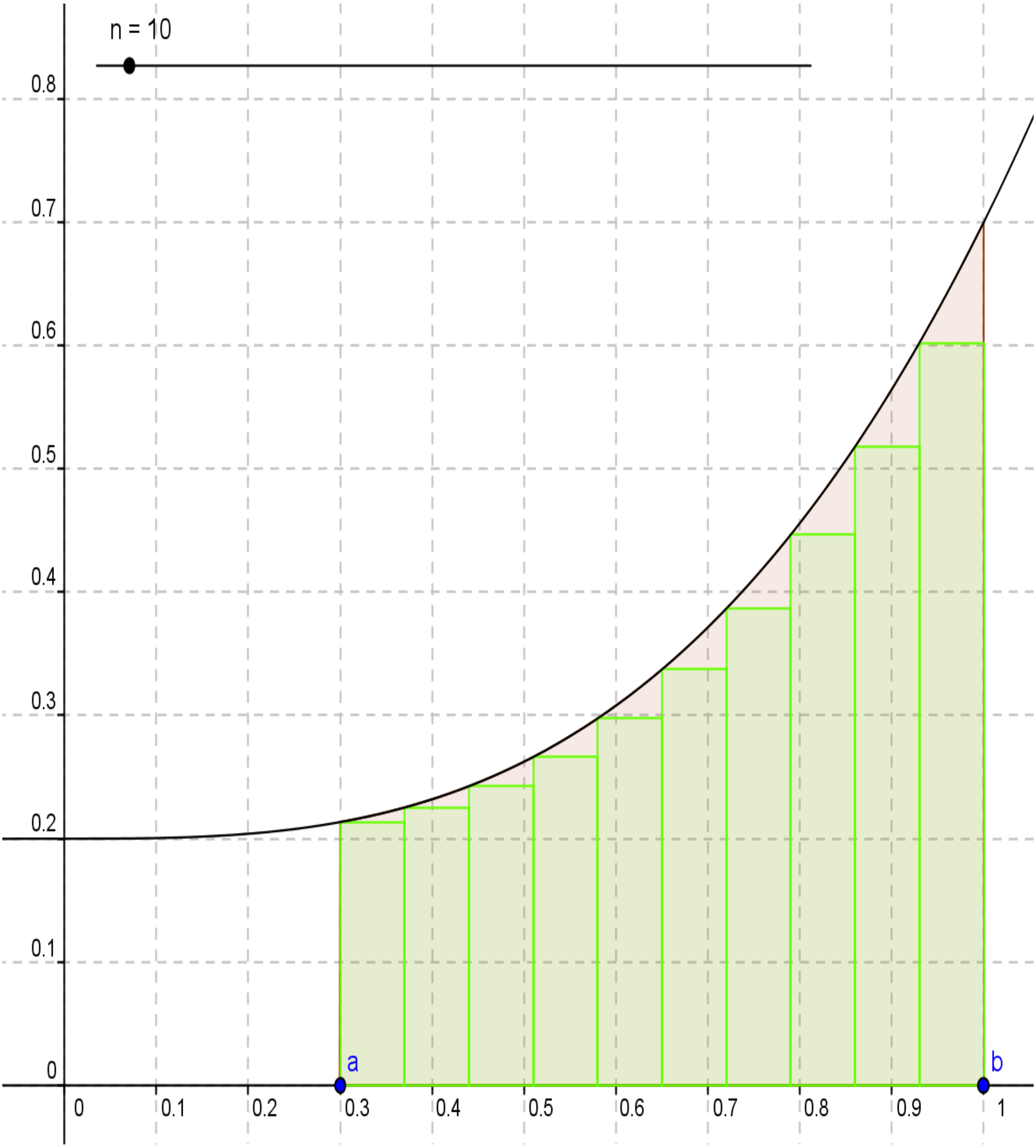
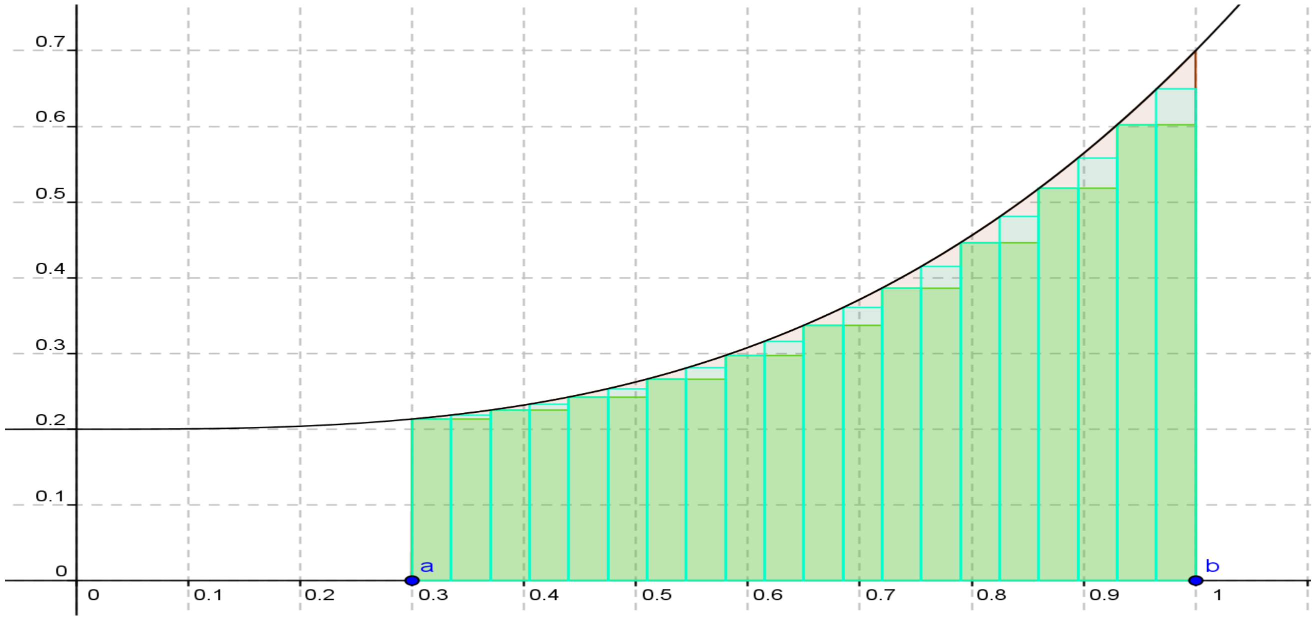
L'intégrale est égale à l'aire sous la courbe.

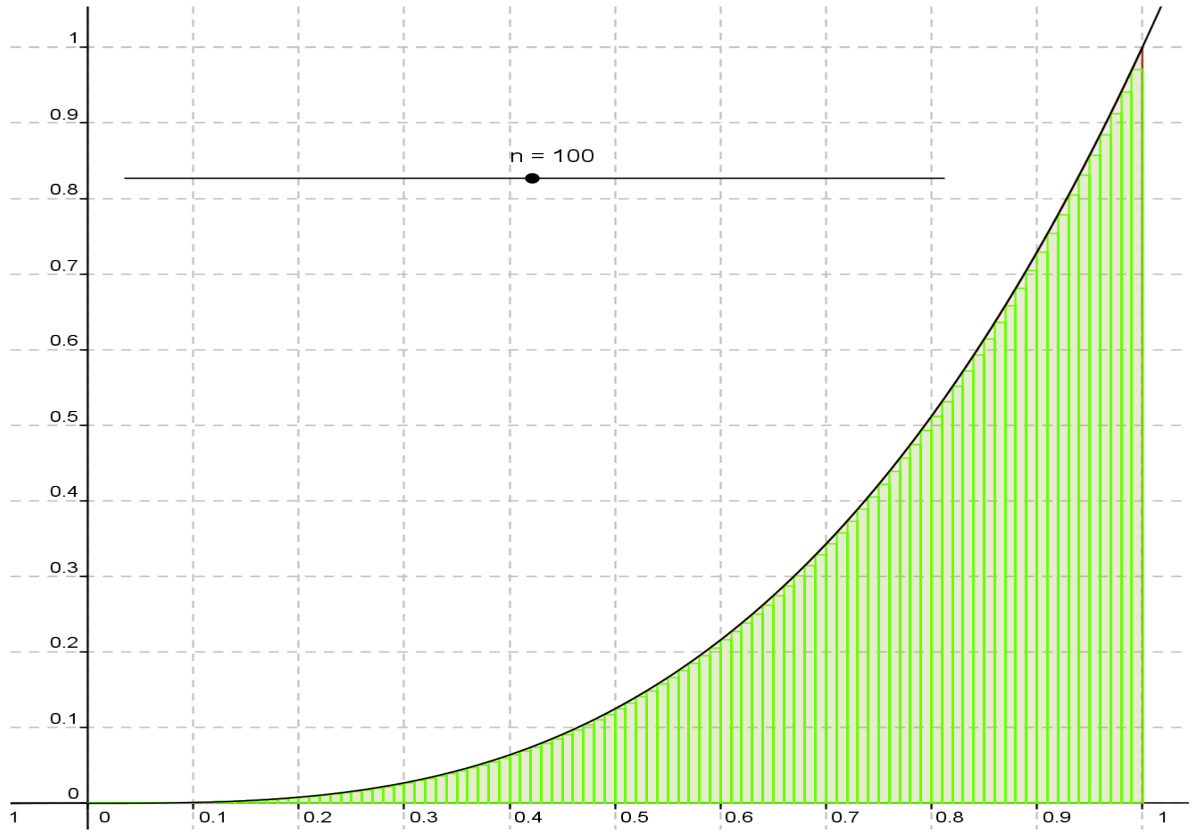
On travaille sur un intervalle $I = [a ; b]$, $a < b$. f est une fonction continue, croissante et positive sur I. Pour n, entier naturel non nul, on approxime l'aire A de la région comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ à l'aide de rectangles de largeur $\frac{a-b}{n}$ comme sur le graphique ci-dessous pour n = 10.



La différence entre l'aire « sous la courbe » et l'aire des rectangles est en rose.
On note (A_n) la suite des aires des rectangles.

On remarque que la suite (A_n) est croissante. On le voit bien ici, pour n = 10, en vert, et pour n = 20, en vert ou bleu. $A_{20} - A_{10}$ est l'aire des rectangles bleus. On peut démontrer que la suite est croissante mais c'est un calcul long et compliqué. Graphiquement, la propriété est évidente.





Pour $n = 100$, la différence entre A et A_n est très petite.
On peut conjecturer que la suite (A_n) converge vers l'aire A.
On admettra ce résultat.

Calcul de A_n.

Pour simplifier les notation, on pose $h_n=\dfrac{b-a}{n}$

$a<b$ donc $h_n>0$.

f est croissante donc $f(a)\leqslant f(a+h)$

Les rectangles sont sous la courbe donc le premier a pour hauteur $f(a)$, le deuxième $f(a+h_n)$, le troisième $f(a+2h_n)$, … , le dernier $f(a+(n-1)h_n)=f(b-h_n)$.

La largeur de chaque rectangle est h_n donc :

$$A_n=f(a)h_n+f(a+h_n)h_n+f(a+2h_n)h_n+...+f(a+(n-1)h_n)h_n$$

$$A_n=\sum_{p=0}^{p=n-1} f(a+p\,h_n)h_n$$

Rapport entre A_n et l'intégrale.

f est la fonction dérivée de *F* donc une approximation affine de $F(c+h_n)$ est :

$$F(c+h_n)\simeq f(c)h_n+F(c)$$

Donc $f(c)h_n\simeq F(c+h_n)-F(c)$ et :

$$\begin{array}{llccc}
\text{pour ,} & c=a, & f(a)h_n & \simeq & F(a+h_n)-F(a) \\
\text{pour ,} & c=a+h_n, & f(a+h_n)h_n & \simeq & F(a+2h_n)-F(a+h_n) \\
\text{pour ,} & c=a+2h_n, & f(a+2h_n)h_n & \simeq & F(a+3h_n)-F(a+2h_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\text{pour ,} & c=a+(n-2)h_n, & f(a+(n-2)h_n)h_n & \simeq & F(a+(n-1)h_n)-F(a+(n-2)h_n) \\
\text{pour ,} & c=a+(n-1)h_n, & f(a+(n-1)h_n)h_n & \simeq & F(a+nh_n)-F(a+(n-1)h_n)
\end{array}$$

En effectuant les sommes des colonnes on obtient :

$$A_n\simeq F(a+n\,h_n)-F(a)$$

$h_n=\dfrac{b-a}{n}$ donc $a+n\,h_n=a+b-a=b$

$A_n\simeq F(b)-F(a)$

On admet que : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=F(b)-F(a)$

Donc $A=\int_a^b f(x)dx$

Pourquoi cette notation *dx* ?

h_n est la différence de deux abscisses comme largeur de chaque rectangle on peut donc noter $h_n=\Delta x$ quand *n* tend vers l'infini, h_n tend vers 0 et on le note *dx*.

Attention, si on change le nom de la variable, par exemple *x* devient *t*, alors on note *dt*.

$$A=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=...$$

On dit que *x*, *t*, *u*, … , sont des variables muettes.

Conclusion.

On retrouve le même résultat pour une fonction positive décroissante. Quand la fonction n'est pas monotone, on la découpe en partie monotone.

Donc pour toute fonction continue positive et pour tout a et b tels que a < b, l'aire *A* de la région comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est

$$A=\int_a^b f(x)dx$$