Probabilités

I Vocabulaire

Les probabilités étudient les *expériences aléatoires*, expériences qui ont plusieurs *issues* (résultats) possibles. Exemples : jet d'un dé, tirage d'une carte, jeux de hasards ...

L'*univers,* Ω*,* est l'ensemble des *issues* possibles. $\Omega=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Un *évènement*, A, est un sous ensemble de l'univers. $A\subset\Omega$

L'*évènement certain* est Ω.

L'*évènement impossible* est $\emptyset$

Un *évènement élémentaire,* A, a un seul élément. $A=\{x_i\}$
Remarque : on confond souvent x_i et $\{x_i\}$.

L'évènement (A et B) est l'évènement qui contient les éléments communs à A et à B, c'est l'intersection de A et B. $(A \text{ et } B)=A\cap B$

L'évènement (A ou B) est l'événement qui contient les élément qui appartiennent soit à A, soit à B, soit à (A et B), c'est l'union de A et B. $(A \text{ ou } B)=A\cup B$

Deux *évènements*, A et B, sont *incompatibles* s'ils n'ont pas d'élément commun. A et B sont disjoints. $A\cap B=\emptyset$

L'évènement contraire de A, noté $\overline{A}$, est l'évènement qui contient tous les éléments qui n'appartiennent pas à A. $\overline{A}$ est le complémentaire de A. $\overline{A}=\text{ non } A$
$\overline{A}\cap A=\emptyset$ et $\overline{A}\cup A=\Omega$

II Loi de probabilité.

1) Loi de probabilité.

Définition.
$\Omega=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'univers d'une expérience aléatoire.
Une loi de probabilité, notée p, sur Ω associe à chaque événement élémentaire $\{x_i\}$ un nombre p_i positif tel que :
_ $p_1+p_2+\dots+p_n=1$ (1)
_ si A et B sont <u>incompatibles</u> alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$. (2)

Conséquences directes.

$$0\leqslant p_i\leqslant 1.$$

$$\text{Si } A=\{y_1, y_2, \dots, y_p\} \text{ alors } p(A)=p(y_1)+p(y_2)\dots+p(y_p).$$

$$p(\Omega)=p_1+p_2+\dots+p_n=1.$$

$$p(\overline{A})=1-p(A).$$

$$p(\emptyset)=1-p(\Omega)=0.$$

Attention à l'égalité suivante qui est trop souvent confondue avec la deuxième propriété de la définition, (2). Dans le cas général les évènements A et B ne sont pas incompatibles, $A \cap B \neq \emptyset$ et $p(A \cap B) \neq 0$. **La formule à retenir est :**

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

2) Modélisation.

Modéliser une expérience aléatoire c'est définir une loi de probabilité sur Ω.

3) Equiprobabilité.

Si toutes les issues ont la même probabilité la loi est *équirépartie* et on est dans un cas d'*équiprobabilité.*

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n$$

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega}$$

4) Modélisation à partir de fréquences.

Loi des grands nombres. Si on répète k fois et de façon indépendante une expérience aléatoire alors la fréquence des issues tend vers leur probabilité quand k est grand.

Série statistique obtenue en répétant k fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire.

Issue	x_1	x_2	...	x_n	Total
Fréquence	f_1	f_2	...	f_n	1

Si k est grand la modélisation est la loi de probabilité définie par :

$$\text{si } 1 \leqslant i \leqslant n, \quad p_i = p(x_i) = f_i$$

Loi de probabilité.

Issue	x_1	x_2	...	x_n	Total
Probabilité	$p_1 = f_1$	$p_2 = f_2$	...	$p_n = f_n$	1