Les suites arithmético-géométriques.

I Définition.

Une suite arithmético-géométrique (u_n) est définie par récurrence par : $u_{n+1}=q\,u_n+r$.

A chaque étape on multiplie le terme précédent par q (comme pour une suite géométrique) puis on ajoute un nombre r (comme pour une suite arithmétique) d'où le nom.

Attention ces suites ne sont ni arithmétiques ni géométriques.

II Exercices types.

A savoir. **On peut trouver un nombre *b* tel que la suite (v_n) définie par $v_n=u_n+b$ soit géométrique de raison *q*.**

Ce résultat est important car dés qu'on rencontre une suite arithmético-géométrique on sait "où on va".

Dans les exercices classiques sur ce type de suite le plan est :
Soit une suite (u_n) définie par $u_{n+1}=q\,u_n+r$ et u_0 donné.

- définition d'une suite (v_n) définie par $v_n=u_n+b$
- démontrer que (v_n) est géométrique
- déterminer la raison et le premier terme
- écrire v_n en fonction de n et de v_0 ($v_n=v_0\,q^n$)
- écrire u_n en fonction de n ($u_n=v_n-b=v_0\,q^n-b$)
- trouver la limite de u_n (si 0 < q <1 la limite est -b, si q > 1 la limite est infinie)
- on peut aussi demander la limite de v_n puis en déduire celle de u_n

Ce genre d'exercice peut aussi être traité géométriquement comme dans le cours sur les suites définies par récurrence.

- construire la courbe de *f* et la droite d'équation $y=x$.
- construire les points A, B, C, D ...
- conjecturer la limite
- déterminer le point d'intersection des deux courbes
- en déduire la limite de u_n.

III Exemples.

Reprenons le cours sur les suites définies par récurrence. Il y a deux exemples de suites arithmético-géométriques.

1 La première suite (u_n) est définie par $u_{n+1}=0{,}5\ u_n+3$. Dans ce cas *q* = 0,5 et *r* = 3. (Je devrais dire les suites du premier graphique mais on va voir que la limite ne dépend pas du premier terme. Par contre les valeurs de u_n dépendent de u_0).
Géométriquement on "voit" que cette suite converge vers 6 quelque soit la valeur initiale u_0 . En appliquant la règle : "si 0 < *q* <1 la limite de u_n est -*b*", on conjecture que b = -6.

Attention, on ne vous demande pas de faire cette démarche car dans les exercices on vous donne le nombre *b*.

Soit la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-6$

Démontrons que (v_n) est géométrique.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-6}{u_n-6}=\frac{0{,}5\ u_n+3\ -6}{u_n-6}=\frac{0{,}5\ u_n-3}{u_n-6}.$$

Si on sait que la raison *q* est 0,5 alors il est évident qu'il faut factoriser le numérateur par 0,5 et que la quantité qui "reste" doit être égale à 1. C'est du calcul, on ne réfléchit plus, on factorise.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{0{,}5\ u_n-3}{u_n-6}=\frac{0{,}5\ (u_n-6)}{u_n-6}=0{,}5\ .$$

C'est gagné, (v_n) est une suite géométrique de raison *q* = 0,5 et de premier terme $v_0=u_0-6$.

$$v_n=(u_0-6\ )0{,}5^n.$$

$$v_n=u_n-6\ \Rightarrow\ u_n=v_n+6\ \Rightarrow\ u_n=(u_0-6\ )0{,}5^n+6.$$

$$0<q=0{,}5<1\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} v_n=0\ .$$

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n+6=6.$$

On voit que u_n converge vers 6 quelque soit la valeur initiale u_0 .

2 La deuxième suite (u_n) est définie par $u_{n+1}=1{,}5\ u_n-1$. Dans ce cas *q* = 1,5 et *r* = 1.

Etant donné que *q* est supérieur à 1, la suite ne converge pas et sa limite est infinie. Comment conjecturer la valeur de *b* ? Dans l'exemple précédent -*b* est solution de l'équation $f(x)=x$ (voir le cours sur les suites définies par récurrence). Dans ce cas $f(x)=1{,}5\ x-1$.

$$f(x)=x\ \Rightarrow\ 1{,}5\ x-1=x\ \Rightarrow\ 0{,}5\ x=1\ \Rightarrow\ x=2\ .$$

Soit la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-2$.

Démontrons que (v_n) est géométrique.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}=\frac{1,5\ u_n-1\ -2}{u_n-2}=\frac{1,5\ u_n-3}{u_n-2}\ .$$

Si on sait que la raison q est 1,5 alors il est évident qu'il faut factoriser le numérateur par 1,5 et que la quantité qui "reste" doit être égale à 1. C'est du calcul, on ne réfléchit plus, on factorise.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1,5\ u_n-3}{u_n-2}=\frac{1,5\ (u_n-2)}{u_n-2}=1,5\ \ .$$

C'est gagné, (v_n) est une suite géométrique de raison q = 1,5 et de premier terme $v_0=u_0-2$.

$$v_n=(u_0-2\ )1,5^n.$$

$$v_n=u_n-2\ \Rightarrow\ u_n=v_n+2\ \Rightarrow\ u_n=(u_0-2\ )0,5^n+2.$$

$$q=1,5>1\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} v_n=\infty \text{ (le signe dépend du premier terme) .}$$

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n+2\ =\infty \text{ (le signe dépend du premier terme).}$$

On voit que u_n ne converge pas quelque soit la valeur initiale u_0 .