La fonction exponentielle.

I Première approche.

1 Théorème des valeurs intermédiaires (rappel de cours).

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur [a ; b], tout réel m appartenant à $[f(a);f(b)]$ admet un antécédent unique α appartenant à [a ; b].

Remarque : il peut exister d'autres antécédents en dehors de [a ; b] ;
il est équivalent de dire que l'équation $f(x)=m$ admet une solution unique α appartenant à [a ; b] ;
on peut prendre un intervalle ouvert]a ; b[mais dans ce cas m doit appartenir à l'intervalle
$]\lim_{x\to a} f(x)\,;\,\lim_{x\to b} f(x)[$

2 Application à la fonction logarithme népérien, ln.

ln est continue et strictement croissante sur] 0 ; +∞ [. $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to =\infty} \ln x = +\infty$ donc tout réel m admet un antécédent unique α appartenant à] 0 ; +∞ [.

Donc on peut définir une nouvelle fonction définie sur ℝ appelée exponentielle et notée exp par : exp(m) = α

Autrement dit pour tout α > 0 et tout x >0 :

$\ln(\alpha)=m \Leftrightarrow \exp(m)=\alpha$ **ou** $\ln(x)=y \Leftrightarrow \exp(y)=x$ **. Notez bien :** $\exp(y)>0$

Pour tout x, $\ln(\exp(x))=x$ **et pour tout** $x>0$, $\exp(\ln(x))=x$

exp est la fonction réciproque de ln.

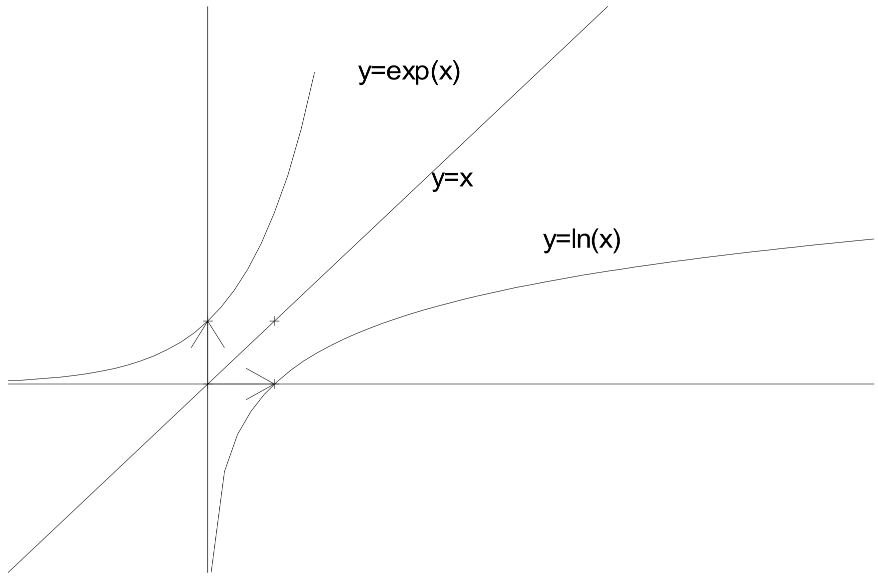
3 Fonction dérivée de exp.

Rappel de cours : $(f(u))' = u'\, f'(u)$ donc $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

On pose $u(x) = \exp(x)$ et $u'(x) = \exp'(x)$

$\ln(\exp(x))=x$ donc $\dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$ donc $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$

4 Symétrie des courbes de ln et de exp par rapport à la droite d'équation y = x.



5 **Notation définitive : exp(x) = e^x^.**

$\ln(\exp(1))=1$ et $\ln(e)=1$ donc $\exp(1)=e$

Pour tout entier relatif n, $\ln(\exp(n))=n$ et $\ln(e^n)=n\ln(e)=n$ donc $\exp(n)=e^n$

En particulier : $\exp(0)=e^0=1$ et $\exp(-1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

$\ln(\exp(\frac{1}{2}))=\frac{1}{2}$ **et** $\ln(\sqrt{e})=\frac{1}{2}\ln(e)=\ln(e^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}$ **donc** $\exp(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}$

On généralise pour les rationnels $\dfrac{a}{b}$ puis pour tous les réels x .

$$\boxed{\exp(x)=e^x}$$

II Définition de la fonction exponentielle.

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de ln. Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est positive. Pour tout x de $\mathbb{R}$: $\boxed{\exp(x)=e^x>0}$

III Propriétés algébriques.

Pour faire simple, le logarithme "transforme" un produit en somme, un inverse en opposé, un rapport en différence, la fonction exponentielle "transforme" une somme en produit, un opposé en inverse, une différence en inverse.

Les calculs algébriques avec la fonction exponentielle suivent les règles du calcul sur les puissances. Cela correspond bien à la notation e^x , e "puissance" x.

1 Formules.

$$\boxed{e^{a+b} = e^a\ e^b \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{ab} = \left(e^a\right)^b = \left(e^b\right)^a \qquad e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e} \text{ et bien sur } e^0 = 1 \text{ et } e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

2 Résolution d'équations.

$$\boxed{\ln x = a \Rightarrow x = e^a}$$
$$\boxed{\text{Si } x > 0 \text{ alors } x = e^a \Rightarrow \ln x = a \text{ sinon } S = \varnothing}$$

IV Etude de la fonction exponentielle.

1 Variations.

On a vu que $\left(e^x\right)' = e^x$ et $e^x > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 Limites.

Limite en -∞.
Rappel de cours $\lim\limits_{y \to 0} \ln y = -\infty$, en remplaçant x par $\ln(y)$: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{y \to -\infty} e^{\ln y} = \lim\limits_{y \to 0} y = 0$

Limite en +∞.
En remplaçant x par $-y$ et sachant que $e^y > 0 \Rightarrow \frac{1}{e^y} > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \lim\limits_{y \to -\infty} e^{-y} = \lim\limits_{y \to -\infty} \frac{1}{e^y} = +\infty$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$

V Calcul de dérivées.

$$\boxed{\left(e^u\right)' = u'\ e^u}$$

Conséquences : $\left(e^{ax+b}\right)' = a\ e^{ax+b} \qquad \left(e^{-x}\right)' = -e^{-x} \qquad \left(e^{ax^2+bx+c}\right)' = (2\ a x + b)\ e^{ax^2+bx+c}$