Fonction exponentielle.Suite du cours.

I Limites remarquables.

1) Limites remarquables de la fonction logarithme népérien. (Rappel).

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x\ \ln(x) = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1}$

2) Limites remarquables de la fonction exponentielle.

On pose $x = \ln(y)$, $x\to-\infty \Rightarrow \ln(y)\to-\infty \Rightarrow y\to 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ e^x = \lim\limits_{y\to 0} \ln(y)\ e^{\ln(y)} = \lim\limits_{x\to 0} y\ \ln(y) = 0$

On pose $x = \ln(y)$, $x\to+\infty \Rightarrow \ln(y)\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{e^{\ln(y)}}{\ln(y)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{\ln(y)} = +\infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \exp'(0) = 1$$

A retenir : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x\ e^x = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1}$

II Croissances comparées.

On compare des fonctions qui tendent vers +∞. On a déjà vu le théorème sur les fonctions rationnelles : " en +∞, une fonction rationnelle a la même limite que le rapport simplifiée des termes de plus haut degré".
Autrement dit x (ou ax+b) tend "moins vite" vers + ∞ que x^2 (ou ax^2 + bx+c) qui tend moins vite que x^3 ... moins vite que x^n ...

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\sqrt{x}$ tend moins vite que x vers $+\infty$.

On sait déjà que $\ln(x)$ tend moins vite que x vers $+\infty$.

Comparons $\sqrt{x}$ et $\ln(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln((\sqrt{x})^2)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ \ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 2\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 2\ \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$$

Comparons l'exponentielle et la fonction puissance n.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln(\frac{e^x}{x^n})} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\ln(x^n)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x(1-n\frac{\ln(x)}{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc x^n tend moins vite que e^x vers $+\infty$

Voici les fonctions rangées par ordre croissant selon qu'elles tendent "plus ou moins vite" vers $+\infty$:

$$\boxed{\ln(x);\ \ldots\ ;\sqrt[n]{x};\ \ldots\ ;\ \sqrt[3]{x};\ \sqrt[2]{x};\ x;\ x^2;\ x^3;\ \ldots\ ;\ x^n;\ \ldots\ ;e^x}$$