Intégrales définies.

I Définition.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. f admet donc une primitive F sur $[a, b]$.
L'intégrale de a à b de la fonction f est la quantité :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

On lit : " somme de a à b de $f(x)$ dx."

L'intégrale est-elle bien définie ? Si G est une autre primitive de f obtient-on le même résultat ?
On sait que pour tout $x \in [a, b]$, $G(x) = F(x) + k$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$$

Donc le résultat ne dépend pas de la primitive choisie.

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \text{ est un nombre.}}$

Présentation du calcul.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

dx indique la variable d'intégration ou variable muette. On peut remplacer x par une autre variable.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Il faut toujours préciser la variable d'intégration sinon gare aux erreurs !

$$\int_2^4 kx^2\,dx = \left[k\frac{x^3}{3}\right]_{x=2}^{x=4} = k\left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) = \frac{56}{3}k$$

$$\int_2^4 kx^2\,dk = \left[\frac{k^2}{2}x\right]_{k=2}^{k=4} = x\left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) = 6\,x$$

Dans ces calculs j'ai précisé, en indice et exposant suivants les crochets, la variable x ou k, ce qu'on ne fait pas en général.

Si l'une des bornes est variable, il faut bien faire attention à ne pas noter avec la même lettre la borne variable et la variable d'intégration.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $x \in [a, b]$.

Voici une notation correcte : $\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$

Voici une notation incorrecte : $\int_a^x f(x)\,dx = [F(x)]_a^x = F(x) - F(a)$

On peut remarquer que la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$ est la primitive de f qui s'annule en a.

II Propriétés.

1 Relation de Chasles.

Soit f une fonction continue sur I et a, b et c appartenant à I.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx}$$

Démonstration.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=F(b)-F(a)+F(c)-F(b)=F(c)-F(a)=\int_a^c f(x)\,dx}$$

2 Opposé.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx}$$

Démonstration évidente. Attention à l'ordre des bornes.

3 Linéarité.

Soit f et g deux fonctions continue sur $[a, b]$ et soit k et l deux constantes.

$$\boxed{\int_a^b k\,f(x)+l\,g(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx+l\int_a^b g(x)\,dx}$$

Démonstration.
Une primitive de kf est kF, une primitive de lg est lG et une primitive de $kf+lg$ est $kF+lG$.

$$\begin{aligned}\int_a^b k\,f(x)+l\,g(x)\,dx&=kF(b)+lG(b)-(kF(a)+l\,G(a))\\&=k(F(b)-F(a))+l(G(b)-G(a))\\&=k\int_a^b f(x)\,dx+l\int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

4 Signe de l'intégrale.

$$\boxed{f>0 \text{ et continue sur } [a,b] \text{ et } a<b \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx>0}$$

Démonstration.
f est la fonction dérivée de F et $f > 0$ sur $[a, b]$ donc F est strictement croissante.
a < b et F est strictement croissante donc $F(a) < F(b)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)>0$$

On démontre de même :

$$\boxed{f < 0 \text{ et continue sur } [a\,,b] \text{ et } a<b \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx < 0}$$

Les réciproques sont fausses. Contre-exemple.

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0 \quad \text{mais } f<0 \text{ sur } [-1,\,0\,[\text{ (et } f>0 \text{ sur }]0\,,\,2\,] \text{).}$$

$$\int_{-2}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{2} - 2 = \frac{-3}{2} < 0 \quad \text{mais } f>0 \text{ sur } [0,\,1\,[\text{ (et } f<0 \text{ sur }]-2\,,\,0\,] \text{).}$$