On démontre de même :

$$\boxed{f<0 \quad \text{et continue sur } [a,b] \text{ et } a<b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx<0.}$$

Les réciproques sont fausses.

$$\int_{-1}^{2} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>0 \text{ pourtant } f<0 \text{ sur } [-1\,;0\,[\ \ (f>0 \ sur\,]0\,;2\,]).$$

$$\int_{-2}^{1} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=\frac{1}{2}-2=\frac{-3}{2}<0 \text{ pourtant } f>0 \text{ sur }]0\,;1\,] \ \ (f<0 \ sur[-2\,;0\,[).$$

5 Ordre et intégrales.

$$\boxed{f<g,\ \ f \text{ et } g \text{ continues sur } [a,b] \text{ et } a<b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)\,dx.}$$

Démonstration.

En appliquant la linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (f-g)(x)dx=\int_a^b f(x)-g(x)dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

on obtient :

$$f-g<0, \quad \text{et continue sur } [a,b] \text{ et } a<b \Rightarrow \int_a^b (f-g)(x)\,dx<0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx.$$

6 Exemples.

a Polynôme.

$$\int_{-3}^{5} x^3+5\,x^2+4\mathrm{x}-1\ dx=\left[\frac{x^4}{4}+5\,\frac{x^3}{3}+4\,\frac{x^2}{2}-x\right]_{-3}^{5}$$

$$\int_{-3}^{5} x^3+5\,x^2+4\mathrm{x}-1\ dx=\frac{625}{4}+5\,\frac{125}{3}+2\times 25-5-\left(\frac{81}{4}+5\,\frac{-27}{3}+2\times 9+3\right)$$

$$\int_{-3}^{5} x^3+5\,x^2+4\mathrm{x}-1\ dx=\frac{1240}{3}$$

b Fonctions rationnelles.

$$\int_3^6 \frac{2}{(x+3)^2}dx=2\int_3^6 \frac{1}{(x+3)^2}\,dx=2\left[\frac{-1}{x+3}\right]_3^6=2\left[\frac{-1}{9}-\left(\frac{-1}{6}\right)\right]=\frac{1}{9}$$

$$\int_1^5 \frac{1}{(2\,x+3)}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(2\,x+3)\right]_1^5=\frac{1}{2}(\ln(13)-\ln(5))=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{13}{5}\right)$$

c Fonctions exponentielles.

$$\int_{-10}^{4} e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x}\right]_{-10}^{4} = \frac{1}{3}\left(e^{12} - e^{-30}\right)$$

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 5} e^x dx = \left[e^x\right]_{-\ln 2}^{\ln 5} = e^{\ln 5} - e^{-\ln 2} = e^{\ln 5} - e^{\ln \frac{1}{2}} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\int_0^4 3x^2 e^{x^3} dx = \left[e^{x^3}\right]_0^4 = e^{64} - e^0 = e^{64} - 1$$

$$\int_0^4 10^x dx = \int_0^4 e^{x \ln 10} dx = \left[\frac{1}{\ln 10} e^{x \ln 10}\right]_0^4 = \left[\frac{1}{\ln 10} 10^x\right]_0^4 = \frac{1}{\ln 10}\left(10^4 - 10^0\right) = \frac{9\,999}{\ln 10}$$

d Fonction logarithme.

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{e^2} = \frac{1}{2}\left((\ln e^2)^2 - (\ln 1)^2\right) = 2$$

Ce dernier exemple n'est pas au programme de TES, mais nous montre une technique d'intégration très performante, l'intégration par parties. On sait que : $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
On en déduit :

$$u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (u(x)v(x))' dx - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

Pour calculer $\int_2^5 \ln x\, dx$ on pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$

$$\int_2^5 \ln x\, dx = [x \ln x]_2^5 - \int_2^5 x \frac{1}{x} dx = [x \ln x]_2^5 - \int_2^5 1\, dx = [x \ln x]_2^5 - [x]_2^5 = [x \ln x - x]_2^5$$

$$\int_2^5 \ln x\, dx = 5\ln 5 - 5 - 2\ln 2 + 2 = \ln \frac{3\,125}{4} - 3$$

Par ce calcul on obtient aussi une primitive de $f(x) = \ln x$ qui est $F(x) = x \ln x - x$.