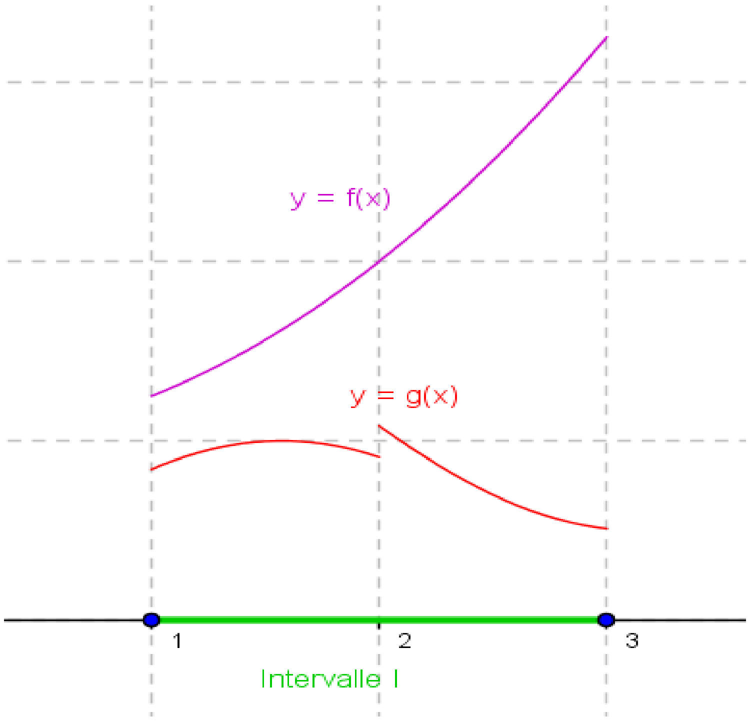
Les limites pratiques.

I_ Continuité.

Toutes les fonctions étudiées en secondaires sont dérivables donc continues.

1_ Graphiquement

Si l'intervalle I est inclus dans D_f alors la représentation graphique de *f* sur I peut se dessiner sans lever le crayon. Il n'y a pas de « coupure ».



La fonction *f* est continue sur I. La fonction *g* n'est pas continue sur I.

2_ Calcul de limite.

Définition.

La fonction *f* est continue en *a* appartenant à D_f signifie :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Exemple de calcul.

Soit la fonction *f* définie sur [-1 ; 1 [par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

On recherche la limite en 1.

Limite du numérateur.

Le numérateur est une fonction affine donc continue sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\lim_{x \to 1} 2x+3 = 2 \times 1 + 3 = 5$$

Limite du dénominateur.

Le dénominateur est une fonction affine donc continue sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\lim_{x \to 1} x-1 = 1-1 = 0$$

On verra la suite dans le prochain paragraphe.

II Des petits et des grands.

Attention, ceci est une méthode pour calculer des limites ou plutôt un « truc » pour appliquer les formules des limites et manipuler zéro et l'infini. Il n'est pas question d'employer les mots petit et grand dans la rédaction. On peut l'écrire au brouillon, mais absolument pas sur la copie.

1_ Conventions.

Petit signifie proche de zéro. Il y a des petits négatifs et des petits positifs.
Un grand est l'inverse d'un petit. Il y a des grands négatifs et des grands positifs.
Un petit est l'inverse d'un grand.

Si le résultats d'un « calcul » est petit alors la limite est 0.
Si le résultat d'un « calcul » est grand alors la limite est infinie. Il faut faire une étude de signe.

2_ Suite de l'exemple.

Brouillon.

$\lim\limits_{x\to 1} x-1=0$

Le dénominateur est petit et son inverse est grand. On fait une étude de signe :

$x\in[-1\ ;\ 1[$ donc $x < 1$ et $x - 1 < 0$ donc $\dfrac{1}{x-1}<0$

L'inverse du dénominateur est un grand négatif.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{x-1}=-\infty$

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}=(2x+3)\dfrac{1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} 2x+3=5$ est un réel positif.

L'inverse du dénominateur est négatif donc la limite est négative.
L'inverse du dénominateur est un grand, 5 grands est grand donc :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$

Rédaction.

$\boxed{\lim\limits_{x\to 1} 2x+3=5}$

$\lim\limits_{x\to 1} x-1=0$ donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ est infinie, on fait une étude de signe.

$x\in[-1\ ;\ 1[$ donc $x < 1$ et $x - 1 < 0$ donc $\dfrac{1}{x-1}<0$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}=-\infty}$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$

III Calculs et limites.

1_ Somme.

Petit est le plus faible et grand est le plus fort. Les réels non nuls sont entre les deux, on les notera l.

Ici on ne s'intéresse qu'aux cas où il y a des grands et des petits. S'il n'y a que des limites réelles non nulles on calcule comme dans $\mathbb{R}$. α représente un réel ou un infini.

Brouillon	Rédaction.
Petit + l = l	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=l$
Grand positif + l = Grand positif	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=+\infty$
Grand positif - l = Grand positif	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)-g(x)=+\infty$
Grand négatif + l = Grand négatif	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=-\infty$
Grand négatif - l = Grand négatif	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)-g(x)=-\infty$
Grand positif + Grand positif = Grand positif	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=+\infty$
Grand négatif + Grand négatif = Grand négatif	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=-\infty$

2_ Produit.

Ici on ne s'intéresse qu'aux cas où il y a des grands et des petits. S'il n'y a que des limites réelles non nulles on calcule comme dans $\mathbb{R}$. α représente un réel ou un infini. Pour trouver le signe on applique la règle des signes.

Brouillon	Rédaction.
Petit $\times$ l = Petit	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=0$
Grand positif $\times$ l positif = Grand positif	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l>0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=+\infty$
Grand négatif $\times$ l positif = Grand négatif	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l>0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=-\infty$
Grand positif $\times$ l négatif = Grand négatif	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l<0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=-\infty$
Grand négatif $\times$ l négatif = Grand positif	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l<0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=+\infty$

Grand $\times$ Grand est Grand. Puis on applique la règle des signes. Donc, sauf pour la première, il suffit de remplacer l par Grand (partie brouillon) ou l positif par $+\infty$ et l négatif par $-\infty$ (partie rédaction) dans les formules ci-dessus.

3_ Rapport.

Brouillon	Rédaction.
L'inverse d'un Grand est petit	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)}=0$ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)}=0$
L'inverse d'un petit est Grand Il faut faire une étude de signe	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0\, et\, f(x)>0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0\, et\, f(x)<0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

$\dfrac{a}{b}=a\times\dfrac{1}{b}$ donc pour calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, on calcule la limite de $f(x)$ et celle de $\dfrac{1}{g(x)}$ puis on applique les règles du produit. Voir l'exemple donné au début.

III_ Forme indéterminée.

Attention, c'est la forme qui est indéterminée, pas la limite. Il faut donc changer la forme. La plupart du temps on factorise et on simplifie, mais il y a d'autres techniques.

Dans la suite, je note une forme indéterminée F.I.

Brouillon	Rédaction
Grand positif - Grand positif est une F.I.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)-g(x)$ est une forme indéterminée
Grand positif + Grand négatif est une F.I.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)$ est une forme indéterminée
Grand $\times$ petit est une F.I.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)$ est une forme indéterminée $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)$ est une forme indéterminée

Pour les rapports, l'inverse d'un Grand est petit et l'inverse d'un petit est Grand. Donc la règle ci-dessus donne :

$\dfrac{\text{Grand}}{\text{Grand}}$ est une F.I.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée
$\dfrac{\text{petit}}{\text{petit}}$ est une F.I.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée

III_Lever une indétermination.

1_ A l'infini.

a_ Limites remarquables.

Ces limites sont des résultats de cours et ne sont pas à justifier.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$

On comparera, dans un prochain chapitre, les croissances des fonctions.

Mais on peut tout de suite remarquer qu'en plus l'infini, l'exponentielle « est plus forte » que la fonction identique, définie par $f(x) = x$, et cette dernière est plus forte que le logarithme.

En moins l'infini, l'exponentielle « est plus forte » que la fonction identique.

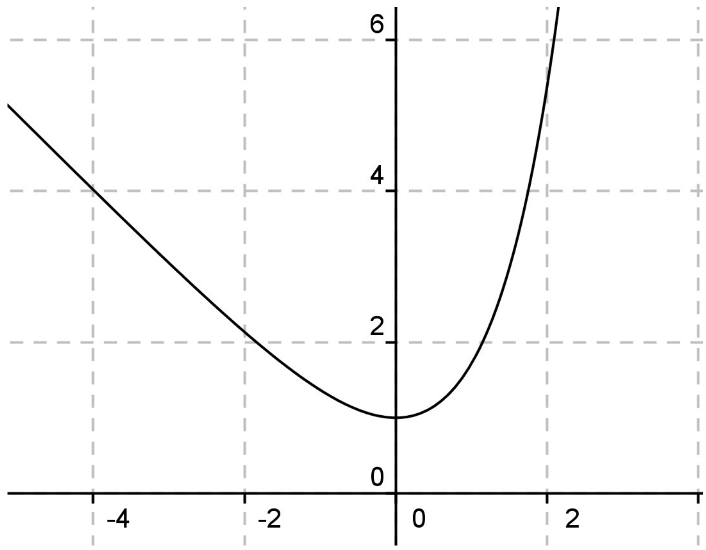
b. Techniques.

La méthode général est de factoriser le terme dominant c'est à dire le plus fort. Donc l'exponentielle s'il y en a, s'il n'y en a pas on factorise le terme de plus haut degré.

Exemple 1.

$\lim_{x \to +\infty} e^x - x$ est une forme indéterminée.

Un bon élève, je ne dis pas un élève bon en mathématiques mais un élève qui travaille efficacement, trace la courbe de la fonction sur sa calculatrice avant de faire l'étude et donc connait le résultat d'avance, en interprétant la courbe et en regardant dans le tableau de valeurs.



Le terme dominant est e^x.

$$f(x) = e^x - x = e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Brouillon : $\frac{e^x}{x}$ est Grand son inverse est petit

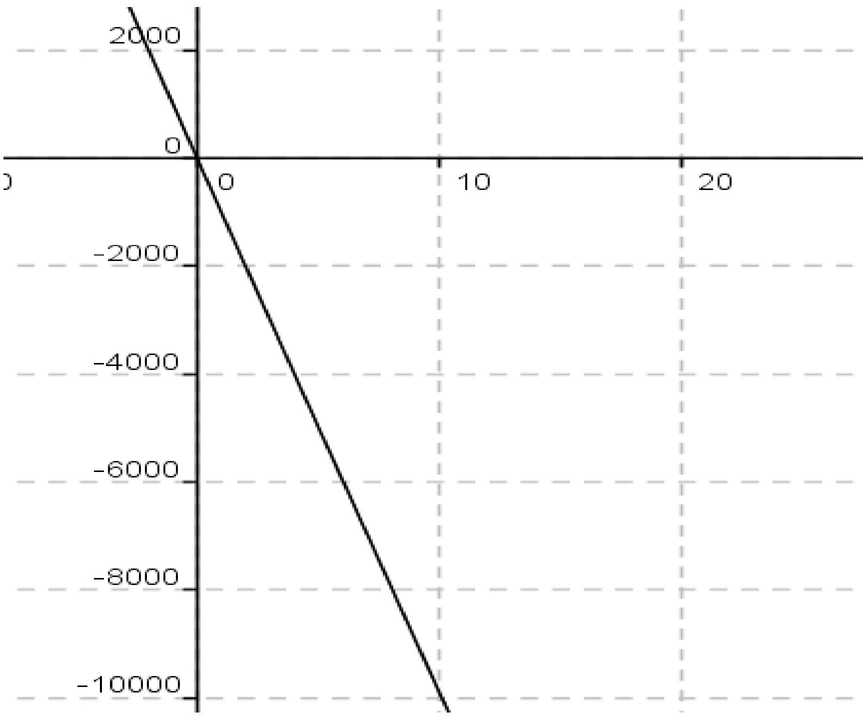
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty \text{ donc } \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x = +\infty}$$

Exemple 2.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 1000x$ est une forme indéterminée.

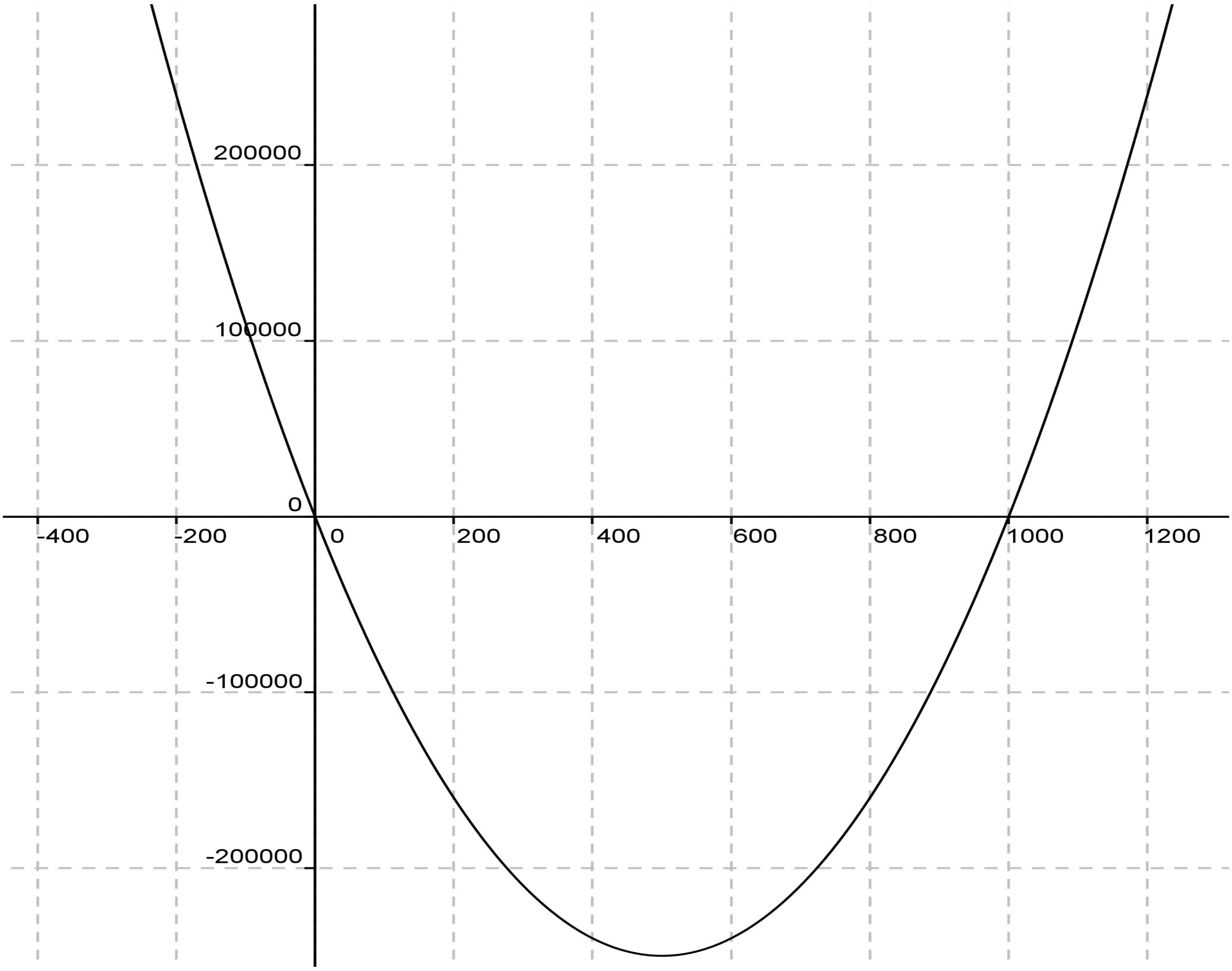
En réglant la fenêtre, on arrive à voir ceci. ~~Conjecture : la limite est moins l'infini.~~



On doit s'apercevoir de l'erreur de conjecture en regardant dans le tableau de valeurs. Mais il faut choisir de très grande valeurs de x car on travaille au voisinage de plus l'infini.

Si on réfléchit, c'est encore mieux qu'une calculatrice, la fonction est du second degré, le coefficient de x^2 est positif donc la courbe est une parabole du type « U ».

Faisons un « zoom out ».



Le terme dominant est x^2.

$$f(x)=x^2-1000x=x^2\left(1-\frac{1000}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ Brouillon : x est Grand son inverse est petit

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1\,000=1\,000\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1000}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1000\times\frac{1}{x}=0$$

Brouillon : petit $\times l=$ petit

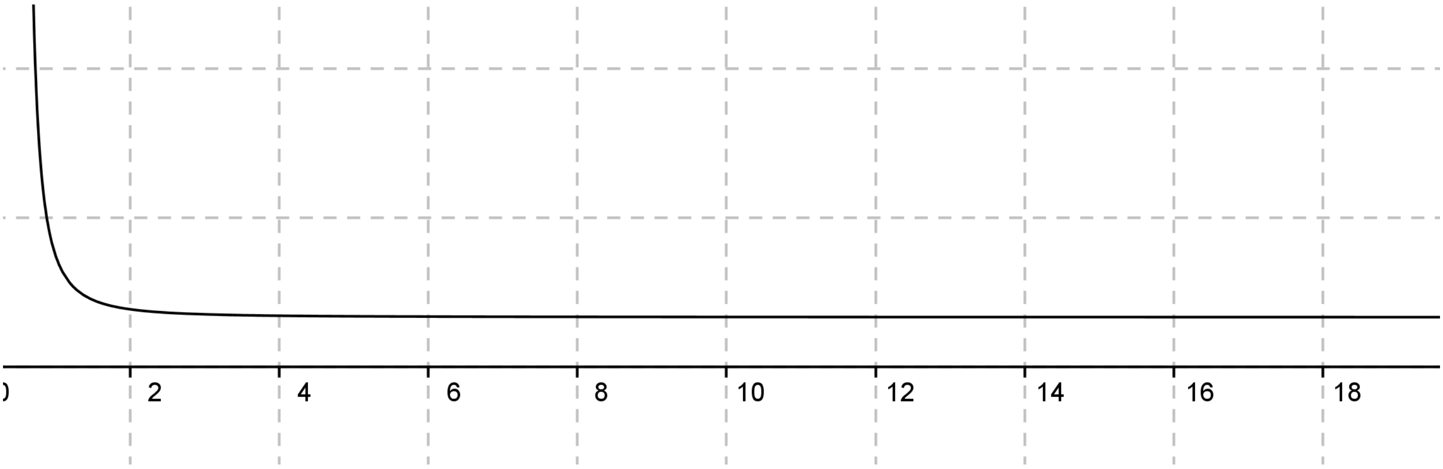
ou $\frac{l}{\text{Grand}}=$ petit

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1000}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1000}{x}=1$$

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1000}{x^2}\right)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x\left(1-\frac{1000}{x^2}\right)=+\infty \text{ donc } \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-1000x=+\infty}$$

Exemple 3.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{3x^3-x}$ est une forme indéterminée.



Conjecture : la limite est finie.

Le terme dominant du numérateur est x^3 et celui du dénominateur est x^3.

$$f(x)=\frac{2x^3+1}{3x^3-x}=\frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{1}{x^2}}$$

$\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}=0$ Brouillon : x^3 est Grand son inverse est petit

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}=0\\ \lim_{x\to+\infty} 2=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x^3}=2$$

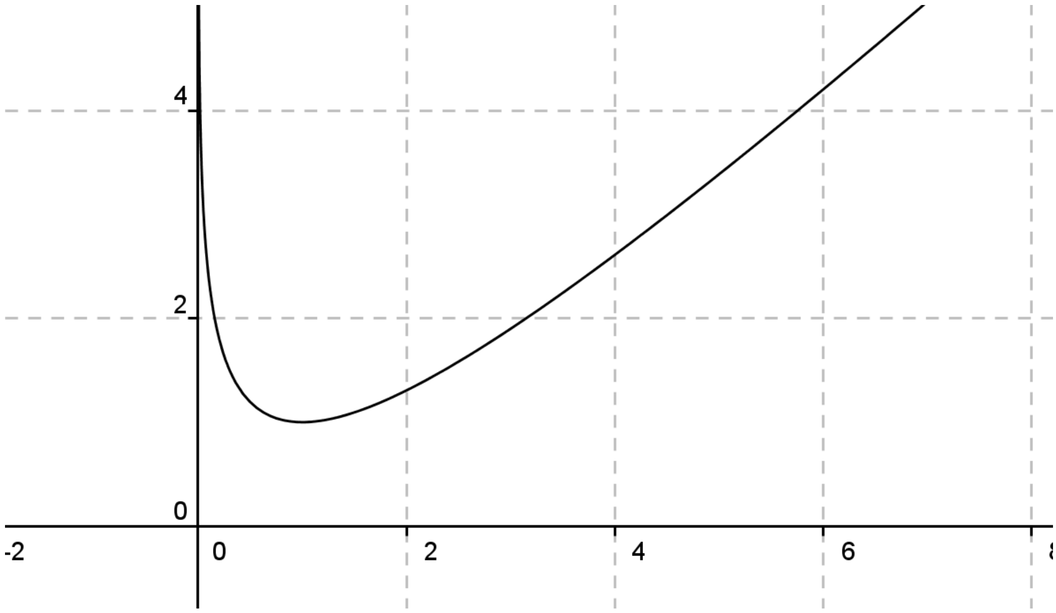
$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0$ Brouillon : x^2 est Grand son inverse est petit

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0\\ \lim_{x\to+\infty} 3=3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 3-\frac{1}{x^2}=3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x^3}=2\\ \lim_{x\to+\infty} 3-\frac{1}{x^2}=3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3} \text{ donc } \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{3x^3-x}=\frac{2}{3}}$$

Exemple 4.

$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ est une forme indéterminée.



Le terme dominant est x.

$f(x)=x-\ln x=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$

On sait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}1-\frac{\ln x}{x}=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}1-\frac{\ln x}{x}=1\\ \lim_{x\to+\infty}x=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=+\infty$$

b_ Théorèmes sur les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles.

(Voir la définition de fonction polynôme et fonction rationnelle dans le cours des secondes)
Théorème 1.
A l'infini, une fonction polynôme à la même limite que sont terme de plus haut degré.

Théorème 2.
A l'infini, une fonction rationnelle à la même limite que le rapport simplifié des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Reprenons les exemples 2 et 3 ci-dessus.
Exemple 2.

$$\lim_{x\to+\infty}x^2-1000x=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

Exemple 3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+1}{3x^3-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Ca peut servir de connaître les théorèmes.