Primitives

Dans tout ce chapitre on travaille sur un des fonctions définies sur un intervalle *I*.

I Définition.

La fonction *F* définie sur l'intervalle *I* est une primitive de *f* définie sur *I* signifie que *f* est la fonction dérivée de *F* sur *I*.

$$\boxed{F \text{ est une primitive de } f \ \Leftrightarrow \ F' = f}$$

Exemple : F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = x^2 + 4$ est une primitrive de f définie par $f(x) = 2x$
G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = x^2 - 5$ est une autre primitive de f.

II Existence.

1 Théorème 1.

Toute fonction continue sur *I* admet une primitive sur *I*.

On admet ce théorème.

2 Théorème 2.

Si *F* est une primitive de *f* alors *G,* définie par : $G(x) = F(x) + k$, est une primitive de *f*.
Si *F* et *G* sont deux primitives de *f* alors *G* vérifie : $G(x) = F(x) + k$.

Démonstration. $G' = F' = f$ donc G est une primitive de *f*.
$(F\text{-}G)' = F'\text{-}G' = f\text{-}f = 0$ (fonction nulle) donc $F\text{-}G$ est une fonction constante égale à k.
$(G\text{-}F)(x) = G(x) - F(x) = k$ donc $G(x) = F(x) + k$.

3 Théorème 3.

Si *f* a une primitive *F* alors elle a une infinité de primitives. Deux primitive diffèrent d'une constante *k*.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 2.

4 Unicité.

Soit *a* appartenant à *I* et *b* quelconque. Si *f* est une fonction continue sur *I* elle admet une unique primitive *F* vérifiant $F(a) = b$.

Démonstration. *f* est continue donc a une primitive *G*. *F* telle que : $F(x) = G(x) - G(a) + b$, convient.
Si *F* et *G* sont deux primitives de *f* vérifiant la condition alors :

$$G(x) = F(x) + k \Rightarrow G(a) = F(a) + k \Rightarrow b = b + k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow F = G.$$

5 Remarque importante.

Toute fonction *f* étudiée en terminale est continue sur D_f et a une infinité de primitives. Pour $a \in D_f$ toute fonction *f* admet une unique primitive *F* vérifiant $F(a) = b$.

III Calcul d'une fonction primitive.

1 Primitives usuelles.

Pour déterminer une primitive ont se sert des formules de dérivation.

f	$f\,'$		f	F
k	0		0	k
x	1		1	$x+k$
x^2	$2\ x$		x	$\frac{x^2}{2}+k$
x^3	$3\ x^2$		x^2	$\frac{x^3}{3}+k$
x^{n+1}	$(n+1)x^n$		x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$		$\frac{1}{x}$ pour $x>0$	$\ln(x)+k=\ln(ax)$ $a>0$ et $\ln(a)=k$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$		$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}+k$
$\frac{1}{x^{n-1}}=x^{-n+1}$	$\frac{-(n-1)}{x^n}=-(n-1)\,x^{-n}$		$\frac{1}{x^n}=x^{-n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+k$
$\sqrt{(x)}=x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$
e^x	e^x		e^x	e^x+k

2 Primitives et opérations.

a Somme. Une primitive de $f+g$ est $F+G$.

b Produit par une constante. Une primitive de kf est kF.

c Fonction composée. Une primitive de $u'f(u)$ est $F(u)$.

d Remarque importante.

Il n'y a pas de formule pour intégrer le produit fg. Il existe une technique pour intégrer certains produits qui s'appelle l'intégration par parties mais cette technique n'est plus au programme de TES. On appliquera cette méthode en exercices dirigées pour calculer par exemple une primitive de ln.

3 Exemples.

a Fonction polynôme.

Soit *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{f(x)=4x^5-5x^4+4x^2+7x-6}$

On applique les formules : une primitive de x^n est égale à $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

une primitive de kf est égale à kF

une primitive de 1 est égale à x

$$F(x)=4\frac{x^6}{6}-5\frac{x^5}{5}+4\frac{x^3}{3}+7\frac{x^2}{2}-6x+k$$

$$\boxed{F(x)=\frac{2}{3}x^6-x^5+\frac{4}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-6x+k}$$

Pour vérifier on dérive la fonction *F*.

b Fonction polynôme.

Soit *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{f(x)=(3x^2+4x+1)(x^3+2x^2+x-8)^4}$

On pose $u(x)=x^3+2x^2+x-8$ donc $u'(x)=3x^2+4x+1$ et $f(x)=u'(x)u^4(x)$.

Une primitive de $u'u^4$ est $\frac{1}{5}u^5$

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{5}(x^3+2x^2+x-8)^5+k}$$

c Fonction rationnelle.

Soit *f* définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par : $\boxed{f(x)=\frac{2x+3}{x+1}}$

On écrit f sous la forme $f(x)=a+\frac{b}{x+1}$

$$f(x)=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$$

$\frac{1}{x+1}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x+1$ et $u'(x)=1$.

Attention, $x+1$ est négatif sur $]-\infty;-1[$. Donc il faut distinguer deux cas.

Premier cas. Sur $I=]-1;+\infty[$, $u(x)>0 \Rightarrow \frac{u'}{u}$ a pour primitive ln(u).

$$\boxed{F(x)=2x+\ln(x+1)+k}$$

Deuxième cas. Sur $I=]-\infty;-1[$

$\frac{1}{x+1}=\frac{-1}{-(x+1)}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=-(x+1)$ et $u'(x)=-1$. $u(x)>0 \Rightarrow \frac{u'}{u}$ a pour primitive ln(u).

$$\boxed{F(x)=2x+\ln(-(x+1))+k=2x+\ln(-x-1)+k}$$

On peut regrouper les deux cas en un seul avec la valeur absolue.

$$\boxed{F(x)=2\ x+\ln(|x+1|)+k}$$

<u>A retenir.</u> Si $u>0$ alors $\ln(u)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$

Si $u<0$ alors $\ln(-u)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$

Si u est une fonction qui ne s'annule jamais $\ln(|u|)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$

d Fonction rationnelle.

Soit *f* définie sur $]-\infty;-3\ [\cup]-3\ ;2\ [\cup]2\ ;+\infty[$ par : $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-6}}$

Premièrement on factorise le dénominateur (si ce n'est pas possible on ne sait pas intégrer *f* avec les outils de terminale).

x^2+x-6 a pour discriminant $\Delta=b^2-4\ ac=1\ -4\ (-6)=25$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\ a}=\frac{-1\ -5}{2}=-3 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\ a}=\frac{-1\ +5}{2}=2$$

donc $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{(x-2\ )(x+3)}}$

Deuxièmement on change l'écriture.

On écrit *f* sous la forme : $f(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}=\frac{a(x+3)+b(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{(a+b)x+3\mathrm{a}-2\mathrm{b}}{(x-2)(x+3)}$$

On identifie les numérateurs 1 et $(a+b)x+3\mathrm{a}-2\mathrm{b}$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3\ a-2\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\ a+2\ b=0 \\ 3\ a-2\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\ a=1 \\ b=-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{5} \\ b=\dfrac{-1}{5} \end{cases}$$

donc $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}\right)}$

Troisièmement on intègre en appliquant la formule : $\ln(|u|)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u.}$

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{5}(\ln(|x-2|)-\ln(|x+3|))+k=\frac{1}{5}\ln\left(\left|\frac{x-2}{x+3}\right|\right)+k}$$

Le rapport $\frac{x-2}{x+3}$ a le même signe que le produit donc est postif à l'extérieur des racines.

$$\boxed{\text{Pour } x\in]-\infty ; -3[\cup]2 ; +\infty[,\ F(x)=\frac{1}{5}\ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)+k}$$

$$\boxed{\text{Pour } x\in]-3 ; 2[,\ F(x)=\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+3}\right)+k}$$

e Fonction exponentielle.

Soit *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{f(x)=e^{3x-4}}$

On applique la formule : une primitive de $u'e^u$ est $e^{u.}$

$u(x)=3x-4$ et $u'(x)=3$ donc on écrit f sous la forme $f(x)=\frac{1}{3}(3\ e^{x-3})=\frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{3}e^{3x-4}+k}$$

f Fonction exponentielle.

Soit *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{f(x)=(4x+5)e^{2x^2+5x-4}}$

On applique la formule : une primitive de $u'e^u$ est $e^{u.}$

$u(x)=2x^2+5x-4$ et $u'(x)=4x+5$

$$\boxed{F(x)=e^{2x^2+5x-4}+k}$$

g Fonction logarithme.

Soit *f* définie sur $]-1 ; +\infty[$ par : $\boxed{f(x)=\frac{\ln(x+5)}{x+5}}$

On pose $u(x)=\ln(x+5)$ donc $u'(x)=\frac{1}{x+5}$

f s'écrit $f(x)=u'(x)u(x)$ dont une primitive est $\frac{1}{2}u^2(x)$.

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\ln^2(x+5)+k}$$