Probabilité conditionnelle.

I Exemple.

Dans une loterie on tire, l'un après l'autre, sans remettre le premier, deux jetons parmi 6 jetons. Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.
Deux jetons sont marqués *g* et quatre sont marqués *h.*

a Construire un arbre.

b Déterminer la probabilité de tirer aucun jeton g, un jeton g exactement, deux jetons g.

c Déterminer la probabilité de tirer au moins un jeton g.

On suppose que les jetons sont numérotés, dans ce cas tous les tirages sont équiprobables.

On note : G_1 l'évènement : « le premier jeton est marqué *g* »
H_1 l'évènement : « le premier jeton est marqué *h* »
G_2 l'évènement : « le premier jeton est marqué *g* »
H_2 l'évènement : « le premier jeton est marqué h »

La probabilité d'obtenir un jeton g au premier tirage est : $p(G_1)=\frac{1}{3}$;

La probabilité d'obtenir un jeton h au premier tirage est : $p(H_1)=p(\overline{G_1})=\frac{2}{3}$.

Par contre la probabilité d'obtenir un jeton *g* au deuxième tirage dépend du résultat du premier tirage. On dit que <u>cette probabilité est conditionnelle</u> .

Il y a deux cas.

Premier cas.

Le résultat du premier tirage est *h*, on cherche la probabilité de tirer un jeton *g* au deuxième tirage, évènement <u>G_2 sachant que H_1 est réalisé</u>. On note cette probabilité $p_{H_1}(G_2)$ ou encore $p(G_2/H_1)$.

Pour calculer cette probabilité sans employer de formules on se place dans le nouvel univers $\Omega \cap H_1 = H_1$. Comme <u>H_1 est réalisé, il reste deux jetons *g* et trois jetons *h*</u> donc :

$$p_{H_1}(G_2)=p(G_2/H_1)=\frac{2}{5}$$

Formule des probabilités conditionnelles.

En fait, on a calculé la probabilité de l'évènement $H_1 \cap G_2$ dans le nouvel univers H_1.

Donc $\boxed{p_{H_1}(G_2) = p(G_2/H_1) = \dfrac{p(H_1 \cap G_2)}{p(H_1)} = \dfrac{2}{5}}$ (on divise par $p(H_1)$ car, dans le nouvel univers, H_1 a une probabilité égale à 1).

Vérification de cette formule.
On peut représenter l'univers sous forme d'un tableau.

		G_1		H_1				
		g_1	g_2	h_1	h_2	h_3	h_4	
G_2	g_1							10 issues
	g_2	$g_1\ g_2$						
H_2	h_1	$g_1\ h_1$						20 issues
	h_2	$g_1\ h_2$						
	h_3	$g_1\ h_3$						
	h_4	$g_1\ h_4$						
		10 issues		20 issues				30 issues

$$p(H_1 \cap G_2) = \frac{8}{30} \text{ et } p(H_1) = \frac{20}{30} \text{ donc } \frac{p(H_1 \cap G_2)}{p(H_1)} = \frac{8}{30}\frac{30}{20} = \frac{2}{5}$$

De même la probabilité de <u>H_2 sachant que H_1 est réalisé</u> :

$$p_{H_1}(H_2) = p(H_2/H_1) = \frac{3}{5}$$

On remarque que $p_{H_1}(H_2) = p_{H_1}(\overline{G_2}) = 1 - p_{H_1}(G_2)$

Deuxième cas.

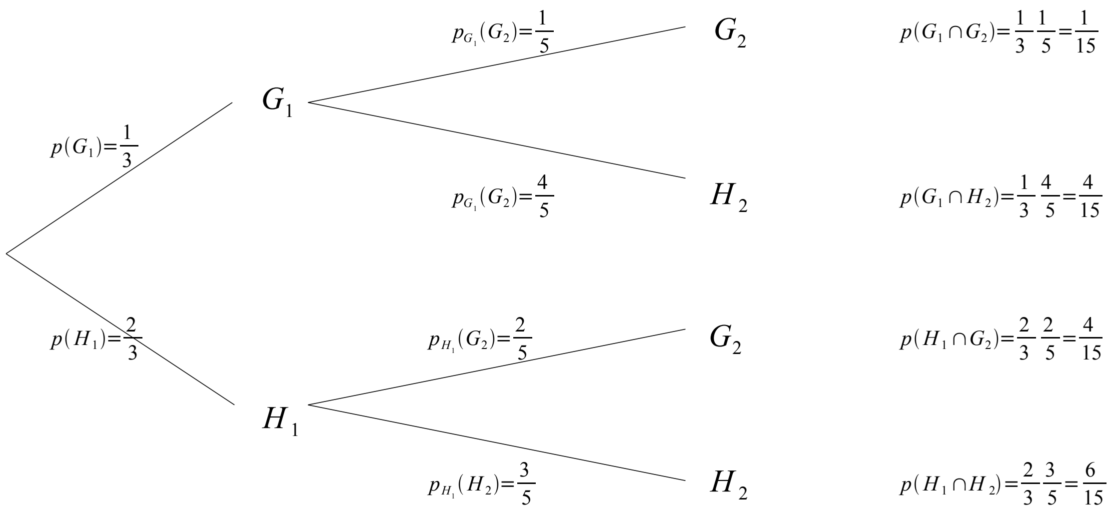
Le résultat du premier tirage est g, on cherche la probabilité de <u>G_2 sachant que G_1 est réalisé</u>.
Pour calculer cette probabilité sans employer de formules on se place dans le nouvel univers $\Omega \cap G_1 = G_1$. Comme <u>G_1 est réalisé, il reste un jeton g et quatre jetons h</u> donc :

$$p_{G_1}(G_2) = p(G_2/G_1) = \frac{1}{5}$$

On en déduit la probabilité de <u>H_2 sachant que G_1 est réalisé</u> :

$$p_{G_1}(H_2)=p(H_2/G_1)=\frac{4}{5}$$

On regroupe ces résultats dans un arbre pondéré :



On applique la formule $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ écrite sous la forme $p(A\cap B)=p_B(A)\,p(B)$
pour calculer la probabilité d'obtenir deux jetons g :

$$p(G_1\cap G_2)=p_{G_1}(G_2)\,p(G_2)=\frac{1}{3}\,\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

On peut vérifier ce résultat dans le tableau.

La probabilité d'obtenir un jeton g exactement est :
$(G_1\cap H_2)$ et $(H_1\cap G_2)$ sont incompatibles donc :

$$p(\{gh,hg\})=p((G_1\cap H_2)\cup(H_1\cap G_2))=p(G_1\cap H_2)+p(H_1\cap G_2)=\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{8}{15}$$

La probabilité de n'avoir aucun jeton g,

$$p(hh)=p(H_1\cap H_2)=\frac{6}{15}$$

Vérification :

$$p(gg)+p(\text{« un } g\text{ »})+p(hh)=\frac{1}{15}+\frac{8}{15}+\frac{6}{15}=1$$

II Les résultats à connaître.

1 Probabilité conditionnelle de B sachant que A, $p(A)\neq 0$, est réalisé.

On la note $p_A(B)$ ou p(B/A).

$$\boxed{p_A(B)=p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}}$$

2 Formule des probabilités composées.

$$\boxed{p(A\cap B)=p_A(B)\,p(A)=p_B(A)\,p(B)}$$

3 Formule des probabilités totales.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω (les A_i sont disjoints deux à deux et leur union est Ω)

$$\boxed{p(B)=p_{A_1}(B)\,p(A1)+p_{A_2}(B)\,p(A_2)+\dots+p_{A_n}(B)\,p(A_n)}$$

$$\boxed{p(B)=\sum_{i=1}^{n} p_{A_i}(B)\,p(Ai)}$$

$$\boxed{p(B)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)+\dots+p(B\cap A_n)}$$

$$\boxed{p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(B\cap Ai)}$$

4 Arbre pondéré.

<u>La somme des pondérations (probabilités) d'un bouquet de branches ayant la même origine est égale à 1.</u>

La ***branche primaire*** Ω ———————— A est pondérée par $p(A)$.

La ***branche secondaire*** A ———————— B est pondérée par $p_A(B)$.

La ***branche tertiaire*** B ———————— C correspondant à la suite de branches Ω ———————— A ———————— B ———————— C est pondérée par $p_{A\cap B}(C)$.

Voir le livre TES pages 148 et 149 et le livre TS page 312.