Le repère semi-logarithmique.

1 Construire un repère semi_logarithmique.

Dans ce repère l'axe des abscisses est gradué de la façon habituelle. Pour deux points A(a ; 0) et B(b ; 0) de l'axe des abscisses, tels que $a<b$, la longueur du segment [AB] est proportionnelle à b-a.

Par contre l'axe des ordonnées est graduée en fonction du logarithme.

L'origine du repère a pour ordonnée 1 car ln(1) = 0.

Pour deux points C(0 ; c) et D(0 ; d) du demi-axe supérieur des ordonnées, tels que $1<c<d$, la longueur du segment [CD] est proportionnelle au logarithme de $\frac{d}{c}$. La hauteur d'un point d'ordonnée y>1 est proportionnelle à ln(y).

Par exemple, sur le repère semi-logarithmique du sujet du baccalauréat d'Amérique du Sud série ES de la session de novembre 2005 l'ordonnée de l'origine est $10^0 = 1$.

Ensuite on a placé le point de (0y) d'ordonnée $10^1 = 10$ qui définit la graduation principale de longueur u cm.

Puis les puissances de 10. La longueur de l'intervalle entre deux puissances successives de 10 est constante et égale à la longueur u de l'intervalle entre $1 = 10^0$ et $10 = 10^1$.
Chaque fois qu'on multiplie l'ordonnée par 10 la hauteur du point augmente d'une unité égale à u cm.
$\ln(10^n) = n\ln(10)$ donc la graduation 10^n correspond à une hauteur de nu cm.

Donc on a placé 1, 10, 100, 1000 ... sur l'axe des ordonnées. plaçons maintenant 2, 20, 200, 2000 ...

Pour 2, il faut trouver x tel que $10^x = 2$.

$$10^x = 2 \;\Rightarrow\; \ln(10^x) = \ln 2 \;\Rightarrow\; x\,ln10 = \ln 2 \;\Rightarrow\; x = \frac{\ln 2}{\ln 10} \simeq 0{,}301$$

Donc on place la graduation 2 à 0,301u cm.

Pour 20, il faut trouver x tel que $10^x = 20$.

$$x = \frac{\ln(20)}{\ln(10)} = \frac{\ln(2) + \ln(10)}{\ln(10)} \;\Rightarrow\; x = \frac{\ln(2)}{\ln(10)} + \frac{\ln(10)}{\ln(10)} \;\Rightarrow\; x = \frac{\ln 2}{\ln(10)} + 1$$

Donc on place la graduation 20 à 0,301u cm au dessus de la graduation 10.

En généralisant la formule la graduation 2a est 0,301u cm au dessus de la graduation a.
Donc les interlignes entre 1, 2, 4, 8, 16, ... sont égaux. De même les interlignes entre 100, 200, 400, 800, ... sont égaux.

On place maintenant les graduations 3, 30, 300 ...

$$10^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 10} \quad \simeq \quad 0{,}477$$

Donc on place la graduation 3 à 0,477u cm de hauteur et 30 à 0,477u cm au dessus de 10 et 3y à 0,477u cm au dessus de y.
Donc les interlignes entre 1, 3, 9, 27, 81, ... sont égaux. De même les interlignes entre 100, 300, 900, 2700, ... sont égaux.

On en déduit que les interlignes entre 2 et 3, 200 et 300, et en général y et 1,5y sont égaux à 0,176u cm.
La graduation 4 est déjà placé, ainsi que 8 et 9. $6 = 4 \times 1{,}5$ on place 6 à 0,176u cm au dessus de 4.

Voici un tableau qui nous permet de terminer la graduation et de repérer les interlignes égaux.

Ordonnée de A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
hauteur de A	0,000	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1,000	1,301	1,477	1,602	1,699
Interligne		0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046	0,301	0,176	0,125	0,097

Ordonnée de A	60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
hauteur de A	1,778	1,845	1,903	1,954	2,000	2,301	2,477	2,602	2,699	2,778	2,845	2,903	2,954	3,000
Interligne	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046

Remarque importante. La graduation 1,5 ne correspond pas au milieu des graduations 1 et 2.
L'interligne 1_1,5 mesure 0,176u et l'interligne 1,5_2 mesure 0,301 - 0,176 = 0,125.

Utilité d'un repère semi-logarithmique.

Dans un repère semi-logarithmique la courbe d'une fonction exponentielle est une droite et les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ qui représente les termes d'une suite géométrique (u_n) sont alignés.

Dans un repère semi-logarithmique, si les points d'un nuage de points sont alignés alors ont peut approximer ce nuage par une courbe exponentielle.