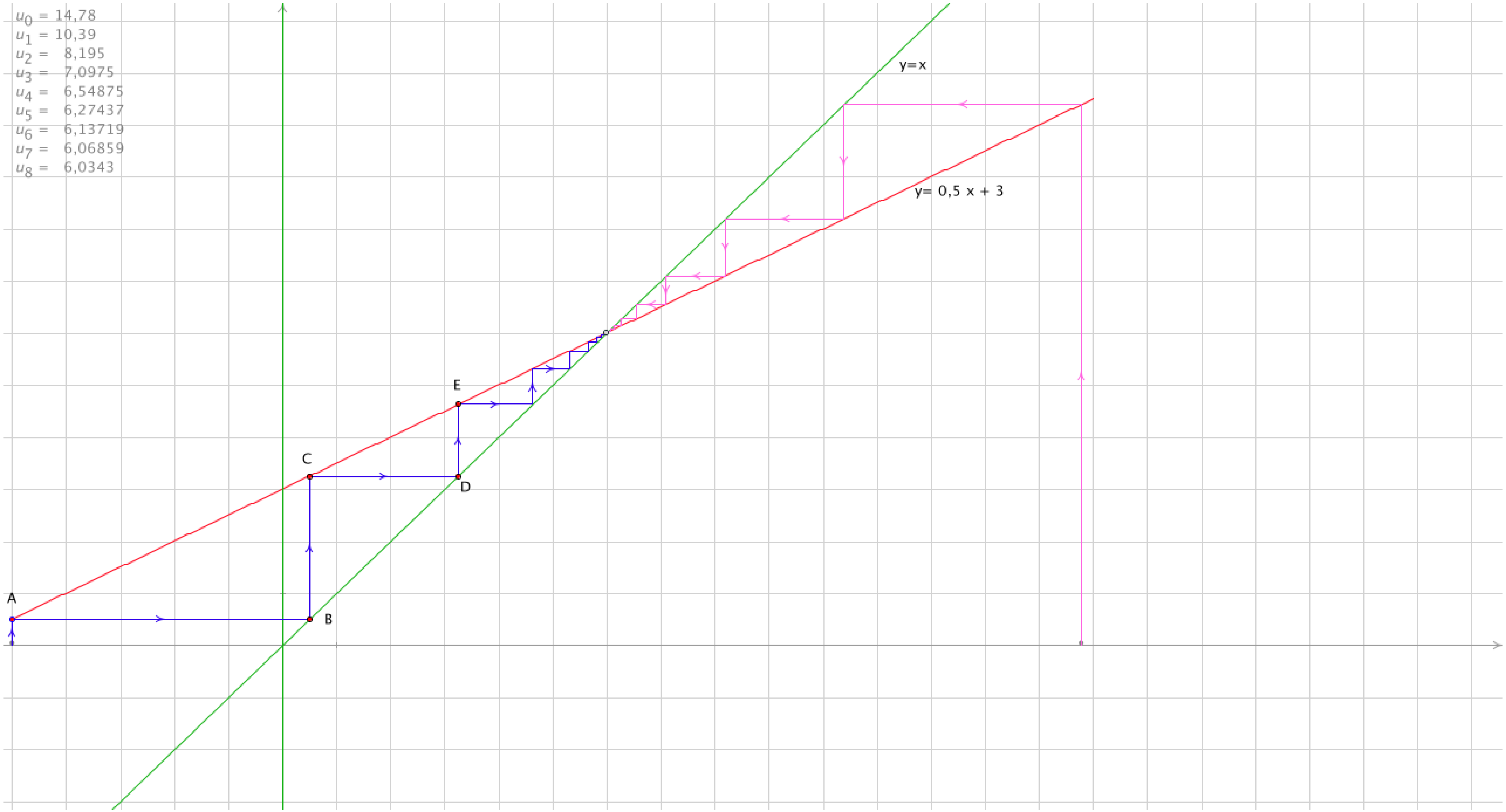
Suites définies par récurrence, $u_{n+1}=f(u_n)$.



La suite u_n est définie par récurrence : $u_{n+1}=0,5\ u_n+3$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=0,5\ x+3$ alors $u_{n+1}=f(u_n)$.
La représentation graphique de la fonction f est la droite rouge.

Premier exemple.

On a choisi $u_0=-5$. Le point A est sur la droite d'équation $y=f(x)$ et $u_1=f(u_0)$ donc ses coordonnées sont $(u_0=-5\ ;u_1=f(u_0)=0,5)$. Le point B est sur la droite d'équation $y=x$ et a la même ordonnée que A donc ses coordonnées sont $(u_1=0,5\ ;\ u_1=0,5\ )$. Le point C est sur la droite d'équation $y=f(x)$ et a la même abscisse que B donc ses coordonnées sont $(u_1\ ;u_2=f(u_1))$. On obtient ainsi $\mathrm{D}(u_2\ ;u_2)$, $\mathrm{E}(u_2\ ;u_3)$...

Pour résumer, les points de la droite d'équation $y=f(x)$ ont pour coordonnées $(u_n;u_{n+1})$ et ceux de la droite d'équation $y=x$ ont pour coordonnées $(u_n;u_n)$.

Deuxième exemple.

On a choisi $u_0=14,78$. On effectue la même construction que dans l'exemple 1. Les valeurs de u_n sont affichées en haut à gauche du graphique.

Convergence.

Dans les deux exemples ont voit que les deux suites de points construits (A, C, E ... et B, D, ...) tendent vers le point d'intersection de la droite d'équation $y=f(x)$ et de la droite d'équation $y=x$. Donc les coordonnées de ces points $(u_n;u_{n+1})$ pour la suite A, C, E ... et $(u_n;u_n)$ pour la suite B, D ... tendent vers les coordonnées du point d'intersection.

Limite de (u_n).

Coordonnées du point d'intersection. On résout le système :

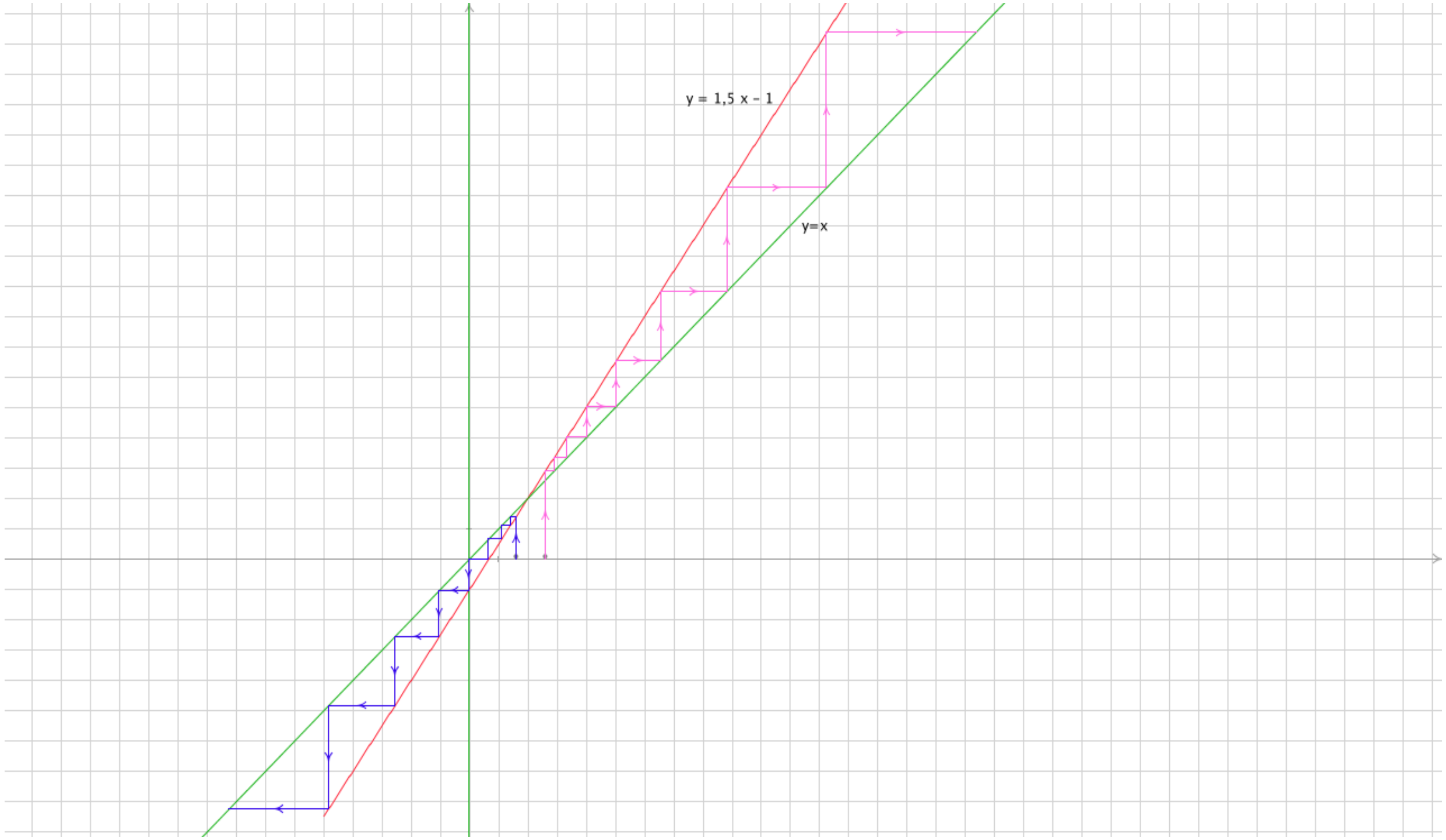
$$\left|\begin{array}{l} y=f(x) \\ y=x \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=f(x) \\ y=x \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=0,5\ x+3 \\ y=x \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x-0,5\ x=3 \\ y=x \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=6 \\ y=6 \end{array}\right.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n;u_{n+1})=(6\ ;6\ )$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=6$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=6$. (u_n) converge vers 6.

Règle à connaître. Soit la suite (u_n) définie par récurrence, $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est une fonction continue. Si u_n converge, sa limite a est solution de l'équation $x=f(x)$.

Démonstration. u_n converge donc il existe a tel que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=a$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_{n+1}=a$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u_n)=a.$ f est continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+innfty} f(u_n)=f(a)$ et donc $f(a)=a.$ C.Q.F.D.

La réciproque est fausse. L'équation $f(x)=x$ peut avoir des solutions sans que la suite converge.



Autre exemple.

Dans ce cas la convergence dépend de la valeur initiale u_0 .