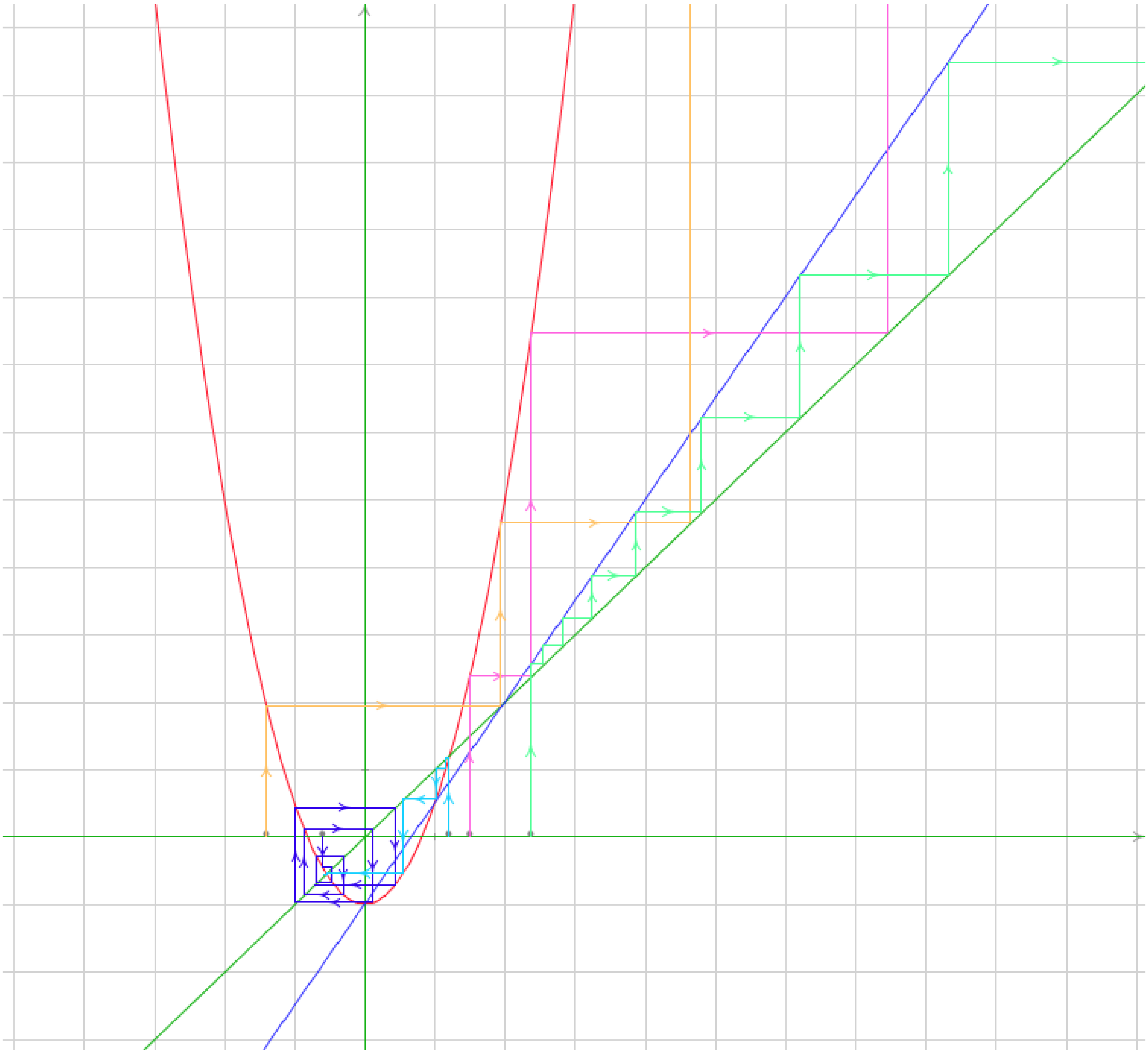
Suites définies par récurrence.

Suite du cours.

Exemple d'étude de suites récurrentes et démonstration par récurrence.



Les suites (u_n) sont définies par la formule de récurrence :
$u_{n+1} = 1{,}5\ u_n^2 - 1 = f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}5\ x^2 - 1$.

On peut voir que les suites (en bleu) convergent quand le premier terme u_0 est dans l'intervalle]-a ; a[où a est l'abscisse d'un des points d'intersection, celui qui a une abscisse positive, de la parabole d'équation $y = 1{,}5\ x^2 - 1$ et de la droite d'équation $y = x$. Elles divergent (suites orange et mauve) en dehors de cet intervalle. La suite verte est définie par la formule de récurrence $u_{n+1} = 1{,}5\ u_n - 1$.

Un exercice classique est l'étude d'une ou deux de ces suites pour des termes initiaux donnés.
Nous allons traiter ici le cas général en trois parties :

$u_0 \in]-a\,;a[$ puis $u_0 \notin [-a\,;a]$ puis $u_0 = a$ et $u_0 = -a$.

Plan :

résoudre $f(x)=x$
en déduire a

pour $u_0 \notin [-a\,;a]$.
démontrer que $u_0 < -a \;\Rightarrow\; u_1 > a$
démontrer que $u_0 > a \;\Rightarrow\; u_1 > a$
démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ $u_n > a$.
en déduire que (u_n) est croissante
minorer (u_n) par une suite arithmético-géométrique
en déduire que (u_n) diverge

pour $u_0 \in]-a\,;a[$.
démontrer par récurrence que pour tout n $u_n \in]-a\,;a[$.
déduire de la première question le nombre l abscisse du deuxième point d'intersection de la parabole et de la droite.
démontrer que l est la limite de u_n (si on y arrive avec nos petits moyens)

pour $u_0 = -a$ ou $u_0 = a$.
(u_n) est stationnaire.

Résolution de l'exercice.

Préambule.

1 Résolution de $f(x)=x$.

$$1{,}5\,x^2 - 1 = x \;\Rightarrow\; 1{,}5\,x^2 - x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 3\,x^2 - 2\,x - 2 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 4 + 24 = 28 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a} = \frac{2-2\sqrt{7}}{6} = \frac{1-\sqrt{7}}{3} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$$

2 D'après le graphique la parabole courbe représentative de f et la droite d'équation $y=x$ ont deux points d'intersection un d'abscisse négative l (limite de (u_n) quand elle converge) et un d'abscisse positive a, donc $a = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$.

Première Partie.

Dans cette partie $u_0 \notin [-a\,;a]$.

1 $u_0 < -a = -\dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow -u_0 > a = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow (-u_0)^2 = u_0^2 > \left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \dfrac{8+2\sqrt{7}}{9}$

$u_1 = 1{,}5\ u_0^2 - 1 > 1{,}5\ \dfrac{8+2\sqrt{7}}{9} - 1 = \dfrac{8+2\sqrt{7}-6}{6} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} = a.$

2 $u_0 > a = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow u_0^2 > \left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \dfrac{8+2\sqrt{7}}{9}$ et d'après le 1 $u_1 > a.$

3 Soit P_n la propriété $u_n > a.$

D'après les résultats des questions précédentes P_1 est vraie.

On suppose que P_n est vraie et on va en déduire P_{n+1} vraie.

Il suffit de remplacer u_0 par u_n dans le calcul de la question 2 :

$u_n > a = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow u_n^2 > \left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \dfrac{8+2\sqrt{7}}{9}$

$u_{n+1} = 1{,}5\ u_n^2 - 1 > 1{,}5\ \dfrac{8+2\sqrt{7}}{9} - 1 = \dfrac{8+2\sqrt{7}-6}{6} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} = a.$

P_{n+1} est vraie.

On a démontré par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

4 Pour démontrer que (u_n) est croissante on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$.
$u_{n+1} - u_n = 1{,}5\ u_n^2 - u_n - 1$ on reconnaît le trinôme du second degré étudié dans la première question, u_0 est à l'extérieur des racines et pour $n \geqslant 1$, P_n implique que u_n est à l'extérieur des racines donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et (u_n) est strictement croissante.

5 Soit la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = 1{,}5\ v_n - 1$ et $v_1 = u_1$.

Soit P_n la propriété $u_n \geqslant v_n$. On va démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

P_1 est vraie.

On suppose que P_n est vraie et on va en déduire P_{n+1} vraie.

$u_n > a > 1 \Rightarrow u_n^2 > u_n$ et $P_n \Rightarrow u_n \geqslant v_n$.

$u_{n+1} = 1{,}5\ u_n^2 - 1 > 1{,}5\ u_n - 1 \geqslant 1{,}5\ v_n - 1 = v_{n+1}$.

P_{n+1} est vraie.

On a démontré par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

6 On a vu que la suite arithmético-géométrique (v_n) tendait vers plus l'infini (voir cours sur les suites arithmético-géométrique). On applique le théorème des gendarmes :

$$u_n > v_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Deuxième partie.

Dans cette partie $u_0 \in]-a\,;a[$.

1 Soit P_n la propriété $-a<u_n<a$.

$u_0 \in]-a\,;a[$ donc P_0 est vraie.

On suppose que P_n est vraie et on va en déduire P_{n+1} vraie.

Premier cas $0 \leq u_n<a$

$$0<u_n<a=\frac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow 0<u_n^2<\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2=\frac{8+2\sqrt{7}}{9}$$

$$-1<u_{n+1}=1{,}5\ u_n^2-1<1{,}5\ \frac{8+2\sqrt{7}}{9}-1=\frac{8+2\sqrt{7}-6}{6}=\frac{1+\sqrt{7}}{3}=a.$$

$$-a<-1 \Rightarrow -a<u_n<a$$

P_{n+1} est vraie.

Deuxième cas $-a<u_n<0$

$$0<-u_n<a=\frac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow 0<(-u_n)^2=u_n^2<\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2=\frac{8+2\sqrt{7}}{9}$$

On retombe sur le premier cas donc P_{n+1} est vraie.

On a démontré par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

2 D'après le graphique la parabole courbe représentative de f et la droite d'équation $y=x$ ont deux points d'intersection un d'abscisse négative l donc $l=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$.