# Les nombres complexes

## *I Pourquoi de nouveaux nombres.*

Pour résoudre des équations.
$x^2+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. On crée un nouvel ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ où cette équation a une solution. On prolonge les règles de calcul de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

## *II Définitions.*

### *1 Le nombre i.*

On note *i* une solution de $x^2+1=0$

Conséquences directes : $\boxed{i^2=-1}$

-*i* est la deuxième solution de $x^2+1=0$

$x^2+1=(x-i)(x+i)$

### *2 Ecriture cartésienne d'un nombre complexe.*

On prolonge les règles de calcul de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ :

$b\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ et $i\in\mathbb{C}$ donc $ib\in\mathbb{C}$.

$a\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ et $ib\in\mathbb{C}$ donc $a+ib\in\mathbb{C}$.

$a+ib\in\mathbb{C}$ et $c+id\in\mathbb{C}$ donc $(a+c)+i(b+d)=e+if\in\mathbb{C}$.

$a+ib\in\mathbb{C}$, $c+id\in\mathbb{C}$ et $i^2=-1$ donc
$$(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2\,bd=(ac-bd)+i(ad+bc)=e+if\in\mathbb{C}.$$

Définitions.
L'ensemble des nombres complexes est l'ensemble $\mathbb{C}=\{z=a+ib,\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\}$
*a* + *ib* est appelé écriture cartésienne du nombre complexe *z*.
$a=\Re(z)$ est appelée la partie réelle de *z*.
$b=\Im(z)$ est appelée la partie imaginaire de *z*.

N.B. $\Re(z)$ et $\Im(z)$ sont tous les deux des nombres réelles.

### *3 Egalité.*

$$a+ib=a'+ib' \Rightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$$

### *III Opérations dans $\mathbb{C}$*

#### *1 Somme.*

0 est l'élément neutre : $z+0=0+z=0$

Tout complexe *z* a un opposé *-z* : $z+(-z)=a+ib+(-a-ib)=0$

$z_1+z_2=z_2+z_1$

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)=z_1+z_2+z_3$

#### *2 Produit.*

1 est l'élément neutre : $1\,(a+ib)=a+ib$

Tout complexe non nul *z* admet un inverse $\frac{1}{z}$

$z_1\,z_2=z_2\,z_1$

$(z_1\,z_2)z_3=z_1\,(z_2\,z_3)=z_1\,z_2\,z_3$

$0\,z=0$

La deuxième propriété n'est pas évidente, il faut démontrer que $\frac{1}{z}$ peut s'écrire sous la forme $c+id$ où les nombres *c* et *d* sont des réels.

$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}$ donc il faut transformer cette écriture et obtenir un dénominateur réel. Quand on veut supprimer un radical du dénominateur on multiplie dénominateur et numérateur par la quantité conjuguée du dénominateur ( $p+q$ et $p-q$ sont des quantités conjuguées ). On applique la même méthode ici.

On se sert du <u>conjugué</u> de $z=a+ib$, le nombre $\overline{z}=a-ib$. Le nombre complexe *z* n'est pas nul donc $(a;b)\neq(0;0)$ donc $\overline{z}\neq 0$ et $a^2+b^2\neq 0$ :

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2-iab+iab-i^2\,b^2}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}$$

Donc l'inverse de *z* est bien un nombre complexe. Il vérifie les égalités :

$\Re(\frac{1}{z})=\frac{a}{a^2+b^2}$ et $\Im(\frac{1}{z})=\frac{-b}{a^2+b^2}$

On remarque aussi que : $z\,\overline{z}=a^2+b^2$

#### *3 Somme et produit.*

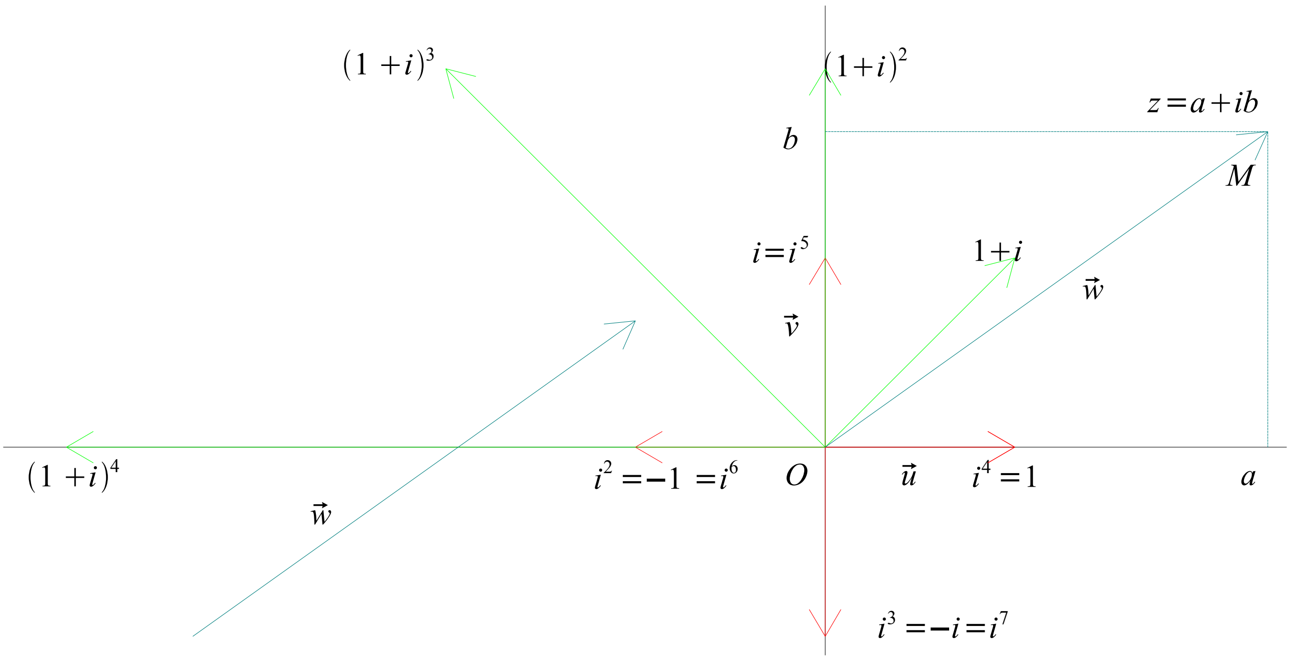
$z_1\,(z_2+z_3)=z_1\,z_2+z_1\,z_3$

#### *4 Conclusion.*

On calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$. Par contre on perd la notion d'ordre ( inférieur ou supérieur n'a pas de sens dans l'ensemble des complexes ).

### *IV Représentation géométrique.*

Le plan est muni du repère orthonormé $(0\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.
A chaque vecteur $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ du plan on fait correspondre le nombre complexe $z=a+ib$ appelé affixe du vecteur $\vec{w}$.
A chaque *M* du plan on fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et donc le nombre complexe $z=a+ib$ appelé affixe du point *M* .




D'après ces définitions, $\vec{u}$ a pour affixe 1, $\vec{v}$ a pour affixe *i*.

Un peu de calcul.

$i^2=-1$ est l'affixe de $-\vec{u}$ , $i^3=-i$ est l'affixe de $-\vec{v}$ , $i^4=1$ est l'affixe de $\vec{u}$ , ...
On peut remarquer que la multiplication par *i* correspond à une rotation de $\dfrac{\pi}{2}$

$1+i$ est l'affixe de $\vec{u}+\vec{v}$, $(1+i)^2=1^2+2\ i+i^2=2\mathrm{i}$ est l'affixe de $2\ \vec{v}$,
$(1+i)^3=2\ i(1+i)=-2+2\ i$ est l'affixe de $2\ (-\vec{u}+\vec{v})$, $(1+i)^4=(2\ i)^2=-4$ est l'affixe de $-4\ \vec{u}$, ...
On peut remarquer que la multiplication par 1 + *i* correspond à une rotation de $\dfrac{\pi}{4}$ composée avec une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ qui se nomme similitude.