La continuité

I Définitions et exemples.

1 Continuité en $a \in D_f$

Définition

La fonction f est continue en $a \in D_f$ signifie $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

D'après la définition de la limite en TS, il ne peut y avoir que deux cas, ou la limite est $f(a)$ ou il n'y a pas de limite.

Attention la continuité n'a de sens que si $a \in D_f$.

Conséquence directe.

D'après les théorèmes sur les limites, si la suite (u_n) converge vers l et si f est continue en l (et si pour n assez grand $f(u_n)$ existe) alors $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$.

Pourquoi la parenthèse ? $\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et la fonction racine est continue en 0 mais aucun des termes de la suite n'appartient à D_f.

Remarques.

Le programme de TS impose dans la définition de la limite en $a \in D_f$ de travailler sur un intervalle I de D_f contenant a. En mathématique on travaille sur un intervalle privé de la valeur a.

En pratique, dans les rares cas où on devra vérifier la continuité d'une fonction f en a, on cherchera la limite en a pour $x \in]a ; a+h[$, $h>0$, puis la limite en a pour $x \in]a-h ; a[$, $h>0$, et on comparera avec $f(a)$.

2 Fonction continue.

Définition

La fonction f est continue signifie qu'elle est continue en tout $a \in D_f$.

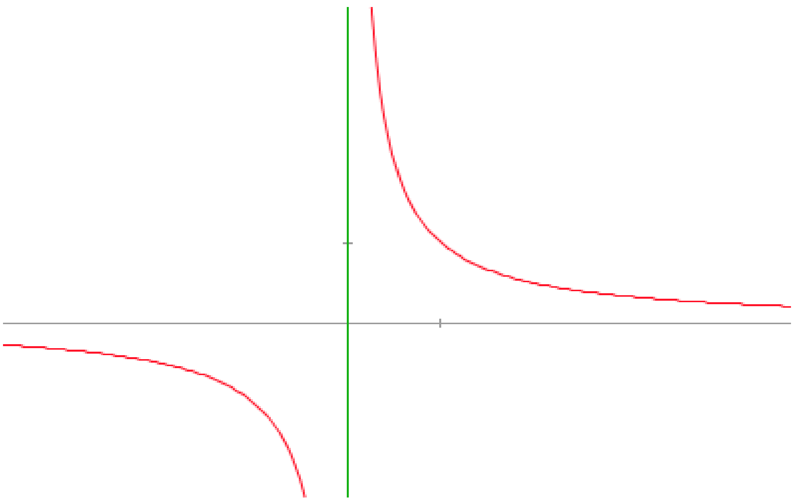
Graphiquement.

Une fonction est continue si on peut dessiner sa courbe <u>sur tout intervalle *I* de l'ensemble de définition</u> sans lever le crayon.

Exemple. La fonction inverse est continue même si sa courbe a deux branches.

On peut tracer la courbe sans lever le crayon sur $]-\infty ; 0[\subset D_f$ et sur $]0 ; +\infty[\subset D_f$

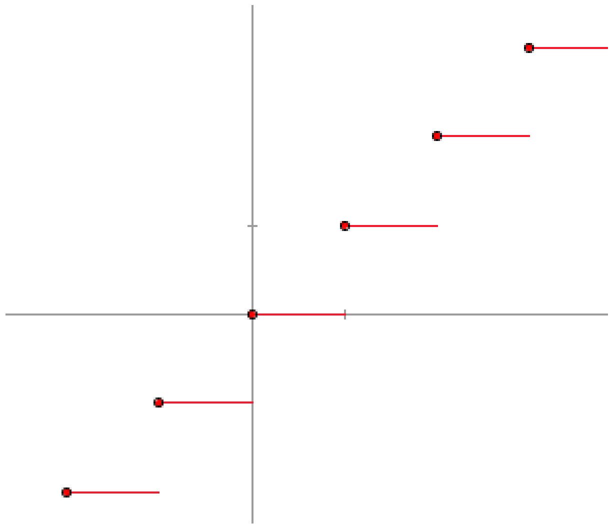
Un intervalle du type $[-a ; a]$ n'est pas inclus dans D_f



2 Exemple de fonction non continue.

On note E la fonction partie entière. Tout nombre réel x est encadré par deux entiers.
Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. n est la partie entière de x, $E(x)=n$.

Attention : $E(\pi)=3$ mais $E(-\pi)=-4$
La partie entière est la valeur approchée par défaut à l'unité près. Si vous tracez la courbe de E sur votre calculatrice elle ne vous donnera peut être pas la même courbe car souvent les calculatrices prennent la troncature et la troncature de $-\pi$ est -3.



Graphiquement on voit de suite que la fonction partie entière n'est pas continue pour toutes les valeurs entières de x.

Par contre cette fonction est continue à droite en ces valeurs.

Démontrons ces résultats.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $I =]n ; n+1[$ par définition de E,
$x \in I \Rightarrow E(x)=n$.
Pour $x \in I$, $\lim\limits_{x \to n \ x>n} E(x) = \lim\limits_{x \to n \ x>n} n = n = E(n)$
donc ***E* est continue à droite en *n*.**

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $I =]n-1 ; n[$ par définition de E, $x \in I \Rightarrow E(x)=n-1$.
Pour $x \in I$, $\lim\limits_{x \to n \ x<n} E(x) = \lim\limits_{x \to n \ x>n} n-1 = n-1 \neq E(n)$ donc ***E* n'est pas continue à gauche en *n*.**

Conclusion. **Pour tout n entier, *E* n'est pas continue en *n* mais est continue à droite en *n*.**

Attention. ***E* n'a pas de limite à gauche en *n* entier.**

II Propriétés.

1 Opérations et continuité.

D'après les théorèmes sur les limites, si f et g sont continues (en a) alors, sous condition d'existence,
$f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$, f^2 ... sont continues(en a).

Si f est continue en a, si $f(a) \in D_g$ et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

2 Conséquences.

Les fonctions polynômes, rationnelles, racines n$^{\text{ième}}$ sont continues sur leur ensemble de définition.
On verra que les fonctions exponentielles et logarithmes sont continues sur leur ensemble de définition.
La seul fonction usuelle (étudiée en TS) non continue est la fonction partie entière.

Par contre si une fonction est définie par intervalle il faut étudier la continuité.

3 Monstre mathématique.

La fonction définie par : $\begin{cases} \text{si } x \in \mathbb{Q}, & f(x)=x \\ \text{si } x \notin \mathbb{Q}, & f(x)=0 \end{cases}$ n'est continue en aucun $x \neq 0$. Elle est continue seulement en 0.

III Théorème des valeurs intermédiaires.

1 Le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème.
Soit *f* une fonction continue sur $[a;b]$ alors pour tout $m \in [f(a);f(b)]$ l'équation $f(x)=m$ a une solution *c* dans $[a;b]$

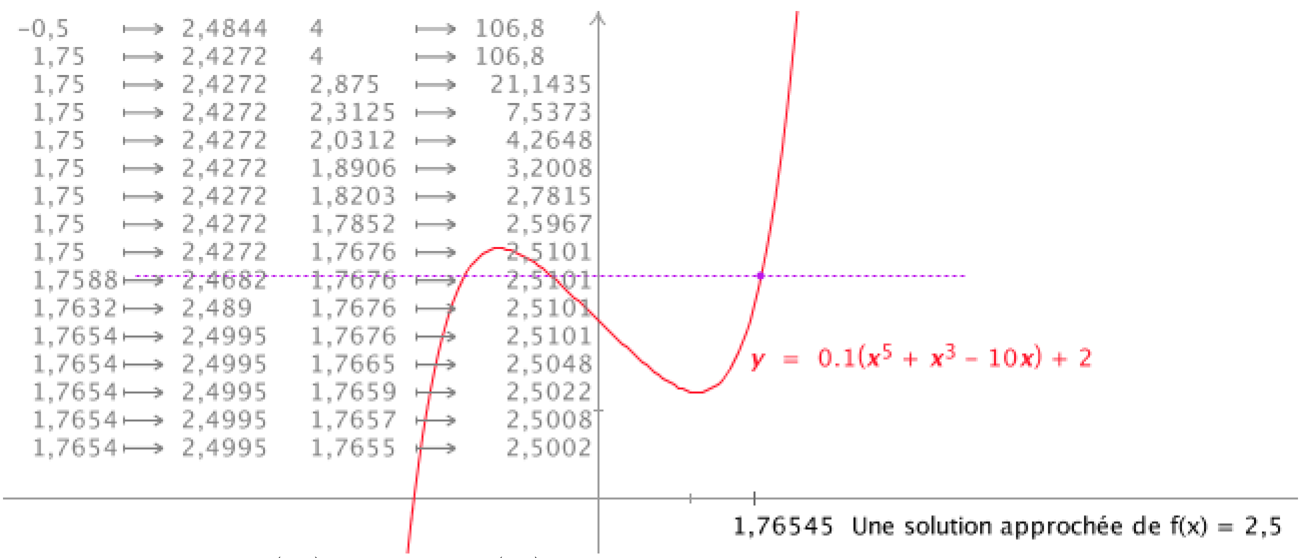
Remarques. Il peut y avoir plusieurs solutions dans $[a;b]$
$[f(a);f(b)]$ n'est pas l'image de $[a;b]$ par *f*. Il suffit de prendre la fonction carré sur [-2;2] pour s'en convaincre, $[f(-2);f(2)]=[4;4]=\{4\}$ et $f([-2;2])=[0;4]$

Variante du théorème.
Soit *f* une fonction continue sur $[a;b]$ alors tout $m \in [f(a);f(b)]$ admet un antécédent *c* dans $[a;b]$

Démonstration.
Cette démonstration n'est pas exigible en TS mais elle justifie la validité de la méthode de dichotomie pour trouver une solution approchée d'une équation.

Simplifions le problème.
Si $f(a)=m$ ou $f(b)=m$ le problème est résolu donc peut poser $m \in]a;b[$.
Quitte à remplacer $f(x)$ par $f(x)-m$ ou $m-f(x)$ on se ramène au cas $f(x)=0$, $a<b$ et $f(a)<0=m<f(b)$. Donc l'équation est $f(x)=0$.

Voici un exemple créé avec Edugraphe.
f est la fonction définie sur [-5;4] par $f(x)=0{,}1\,(x^5+x^3-10\,x)+2$ L'équation est *f*(*x*) = 2,5.
A gauche du graphique les suites $(a_n \to f(a_n))$ et $(b_n \to f(b_n))$, commençant au rang 1.



On remarque que $f(a_n)<2{,}5$ et $f(b_n)>2{,}5$

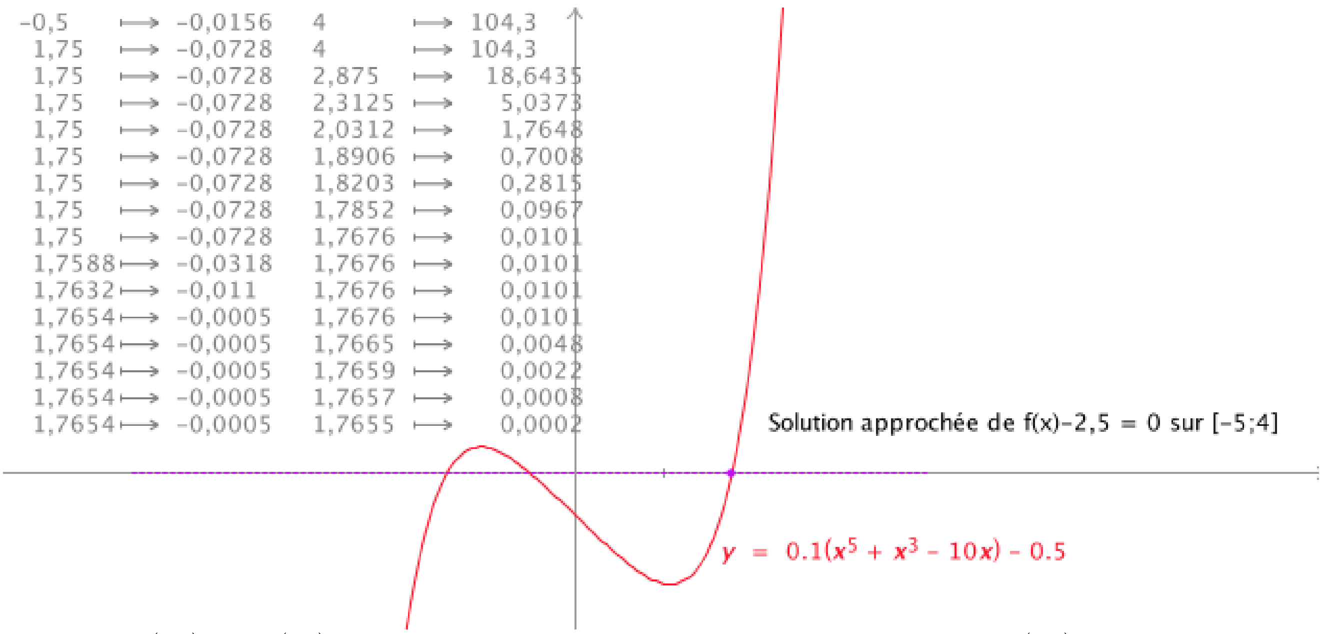
En violet le segment d'équation $y=2,5$ sur l'intervalle [-5;4], en rouge la courbe de *f*.

$a_1=-0,5=\frac{-5+4}{2}$, $a_1=1,75=\frac{-0,5+4}{2}$, $a_3=a_2 \ldots b_1=b_0=4$, $b_2=b_1=4$, $b_3=\frac{1,75+4}{2}\ldots$

Voici le même exemple simplifié.

On résout l'équation $g(x)=0$ où *g* est définie par $g(x)=f(x)-2,5$. Donc on résout $f(x)-2,5=0$.

En rouge la courbe de *g*.



Les suite (a_n) et (b_n) ne changent pas, les images changent et vérifient $g(a_n)<0$ et $g(b_n)>0$

On remarque qu'il a trois solutions et que les suites convergent vers une des solutions. Si on change l'intervalle $I=[a;b]$ tout en respectant la condition $m\in[f(a);f(b)]$ les suites peuvent converger vers une autre solution.

Je vous conseille vivement de de télécharger Edugraphe et de vérifier vous même en manipulant.

Dans la démonstration la fonction s'appelle encore *f* au lieu de *g*. Cela ne change rien.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0=a \\ b_0=b \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\geqslant 0,\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \text{ et } a_{n+1}=a_n \\ \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<0,\ b_{n+1}=b_n \text{ et } a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

Remarque importante. Par définition, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(a_n)<0$ et $f(b_n)\geqslant 0$.

On va démontrer que ces suites sont adjacentes.

$\boldsymbol{a_n<b_n}$

Démontrons par récurrence la propriété P_n : $a_n<b_n$

Initialisation.

P_0 est vraie par hypothèse.

Hérédité.
Supposons P_n vraie, $a_n < b_n$
Ou $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > \frac{2\ a_n}{2} = a_n = a_{n+1}$
Ou $b_{n+1} = b_n$ et $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{2\ b_n}{2} = b_n = b_{n+1}$
Donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion.
Pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n < b_n$

Monotonie.
On applique P_n
Ou $a_{n+1} = a_n$ ou $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > \frac{2\ a_n}{2} = a_n$ donc $a_{n+1} \geqslant a_n$ et la suite est croissante.
Ou $b_{n+1} = b_n$ ou $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{2\ b_n}{2} = b_n$ donc $b_{n+1} \leqslant b_n$ et la suite est décroissante.

Remarque importante. On en déduit que $a = a_0 \leqslant a_n < b_n < b_0 = b$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [a ; b]$ et $b_n \in [a ; b]$.

$\boldsymbol{(b_n - a_n)}$ **converge vers 0.**
Ou $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$
Ou $b_{n+1} = b_n$ et $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ donc $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$

La suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ donc converge vers 0.

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc convergent vers une même limite *c*.

Remarque importante. $a = a_0 \leqslant a_n \leqslant c \leqslant b_n < b_0 = b$ donc $c \in [a ; b]$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = c \in [a ; b]$, $a_n \in [a ; b], b_n \in [a ; b]$ et $f(a_n) < 0 \leqslant f(b_n)$
f est continue sur [*a* ; *b*] donc :

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(c) \leqslant f(0) \leqslant \lim_{n \to +\infty} f(b_n) = f(c)$$

$$c \in [a ; b] \text{ et } f(c) = 0 \quad \text{CQFD}$$

Applications.

Démontrer l'existence de solution d'une équation.

Démontrer qu'une fonction admet « un point fixe *c* » c'est à dire qu'il existe *c* tel que $f(c) = c$. Dans ce cas on applique le théorème à *g* défini par $g(x) = f(x) - x$ et on démontre que 0 a un antécédent par *g*.

2 Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème.

Soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ alors pour tout $m\in[f(a);f(b)]$ l'équation $f(x)=m$ a une solution unique *c* dans $[a\,;b]$

Variante du théorème.

Soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ alors tout $m\in[f(a);f(b)]$ admet un antécédent unique *c* dans $[a\,;b]$

Remarques.

f définie sur $[a\,;b]$ est injective car tout réel admet au plus un antécédent ou autrement dit $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$. La connaissance de la définition de l'injectivité est exigible à la PAES.

La fonction est strictement monotone donc l'image de $[a\,;b]$ par *f* est $[f(a);f(b)]$

f est une bijection de $[a\,;b]$ dans $[f(a);f(b)]$ et on peut définir une application réciproque f^{-1} de $[f(a);f(b)]$ dans $[a\,;b]$ par :

pour $m\in[f(a);f(b)]$, $f^{-1}(m)$ est l'unique antécédent de *m* dans $[a\,;b]$

Démonstration.

Savoir démontrer ce théorème est exigible au BAC, (ROC).

Les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires sont vérifiées donc *m* a un antécédent *c* dans $[a\,;b]$. Il reste à démontrer l'unicité.

Supposons que *c* et *d*, $c\leqslant d$, soient deux antécédents de *m*.
f est strictement monotone, si $c<d$ alors ou $f(c)<f(d)$ ou $f(c)>f(d)$ dans les deux cas c'est impossible car $f(c)=f(d)=m$ donc $c=d$. L'antécédent est unique.

Applications.

Recherche du nombre de solution de $f(x)=m$. On étudie les variations de *f*. Sur chaque intervalle $[a\,;b]$ où la fonction est strictement monotone il y a deux possibilités :

ou $m\notin[f(a);f(b)]$ et il n'y a pas de solution sur $[a\,;b]$

ou $m\in[f(a);f(b)]$ on applique le corollaire et il y a une solution unique sur $[a\,;b]$

Démontrer qu'une fonction admet une application réciproque sur des intervalles bien choisis donc qu'elle est bijective sur des intervalles bien choisis.

3 La généralisation du théorème et du corollaire des valeurs intermédiaires.

On peut encore appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à *f* continue sur un intervalle *I* de la forme $]a\,;b]$ ou $[a\,;b[$ ou $]a\,;b[$ à condition que les limites de *f* en *a* et *b* existent.
Par continuité si *a* ou *b* appartiennent à D_f la limite existe et est $f(a)$ ou $f(b)$ donc on généralise le théorème à des intervalles quelconques.

Pour ne pas répéter trois fois la même chose on notera cet intervalle *I* avec des parenthèses (attention à ne pas confondre avec un couple).

Théorème.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I = (a ; b) telle que $\lim\limits_{x\to a\ \ x\in(a;b)} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b\ \ x\in(a;b)} f(x)$ existent alors pour tout $m\in\left(\lim\limits_{x\to a\ \ x\in(a;b)} f(x);\ \lim\limits_{x\to b\ \ x\in(a;b)} f(x)\right)$ l'équation $f(x) = m$ a une solution c dans $(a;b)$

Attention. Les intervalles I = (a ; b) et $\left(\lim\limits_{x\to a\ \ x\in(a;b)} f(x);\ \lim\limits_{x\to b\ \ x\in(a;b)} f(x)\right)$ sont du même type.

Corollaire.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I = (a ; b) telle que $\lim\limits_{x\to a\ \ x\in(a;b)} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b\ \ x\in(a;b)} f(x)$ existent alors pour tout $m\in\left(\lim\limits_{x\to a\ \ x\in(a;b)} f(x);\ \lim\limits_{x\to b\ \ x\in(a;b)} f(x)\right)$ l'équation $f(x) = m$ a une solution unique c dans $[a;b]$

Théorèmes admis.
Ce qui n'empêchera pas que je vous présente une démonstration hors programme un de ces jours.

Applications.

Les mêmes que pour le cas particulier $I=[a;b]$.

Les fonctions puissances d'exposant paire, $n=2p\neq 0$, sont des bijections de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et admettent une fonction réciproque appelée racine n^ième^, $\sqrt[n]{\ }$, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Les fonctions puissances d'exposant impaire, $n=2p+1$, sont des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et admettent une fonction réciproque appelée racine n^ième^, $\sqrt[n]{\ }$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Toute équation du troisième degré admet une solution réelle (et trois solutions complexes).

La fonction tangente est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ et admet une fonction réciproque appelée Arctangente (avec une majuscule) de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour $k\in\mathbb{Z}$ fixé, la fonction tangente est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ dans $\mathbb{R}$ et admet une fonction réciproque appelée arctangente (avec une minuscule) de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

IV Quelques exemples de démonstrations.

1 Toute fonction continue de [*a* ; *b*] dans [*a* ; *b*] *admet un « point fixe ».*

Soit f une fonction continue de [a ; b] dans [a ; b], il faut démontrer qu'il existe c dans [a ; b] tel que $f(c)=c$.
Soit la fonction g définie sur [a ; b] par $g(x)=f(x)-x$, il faut démontrer que g a une racine, c, sur [a ; b].

f et la fonction identique, $Id : x \to x$, sont continues donc *g* est continue.

$f(a) \in [a ; b]$ donc $f(a) \geqslant a$ et $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$
$f(b) \in [a ; b]$ donc $f(b) \leqslant b$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$

g est continue sur [*a* ; *b*] et $0 \in [g(a) ; g(b)]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a ; b]$ tel que $g(c) = 0$.

$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$. C.Q.F.D.