# Dénombrement

## *I Injection et bijection.*

La notion de *bijection* est au programme de terminale S et ES, mais pas le mot !!!
Le *théorème des valeurs intermédiaires*, dans le chapitre sur la continuité, s'appelle aussi *le théorème de la bijection*.
Injection et bijection sont au programme du bachillerato salvadoreño.

***Définition 1. Bijection.***

La fonction *f* de *E* dans *F* est une bijection signifie que :
_ $D_f = E$
_ tout $y \in F$ admet un antécédent unique dans *E*.

***Définition équivalente 2. Bijection.***

La fonction *f* de *E* dans *F* est une bijection signifie que :
_ $D_f = E$
_ *f* admet une fonction réciproque *g* de *F* dans *E* telle que $D_g = F$
C'est à dire : pour tout $x \in E$ $g \circ f(x) = x$
pour tout $y \in F$ $f \circ g(y) = y$.

***Notation.*** On note $f^{-1}$ la fonction réciproque de *f*.

***Démonstration.***

*Définition 1 implique Définition 2.*

Tout $y \in F$ admet un antécédent unique, x, par *f* dans *E* donc on définit la fonction *g* par $g: y \to x$ et donc $D_g = F$.
Par définition de *g* pour tout $y \in F$ $f \circ g(y) = f(x) = y$.
$D_f = E$ donc pour tout $x \in E$ $g \circ f(x) = g(y) = x$

*Définition 1 implique Définition 2.*
$D_g = F$ donc tout $y \in F$ a pour antécédent $g(y)$ par *f*.
Unicité. Soit $x_1$ et $x_2$ telles que $f(x_1) = f(x_2)$
Pour tout $x \in E$ $g \circ f(x) = x$ et $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ donc $x_1 = x_2$

***Exemples.***

Toutes les isométries du plan (et de l'espace) sont des bijections du plan dans le plan (de l'espace dans l'espace).
Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ , $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$
Soit $s_d$ la réflexion d'axe *d*, $s_d^{-1} = s_d$
Je laisse aux lecteur le soin de trouver les autres.

Toutes les fonction affines non constantes sont des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

Toutes les fonctions monômes de degré impair sont des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$f(x)=x^{2n+1}$, $f^{-1}(x)=\sqrt[2n+1]{x}$

Les fonctions monômes de degré pair ne sont pas des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais si on restreint l'ensemble de définition à $\mathbb{R}^+$ ce sont des bijections de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

$$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+ \qquad f^{-1}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$$
$$x\to x^{2n} \qquad x\to\sqrt[2n]{x}$$

**Nota bene. Les fonctions racine n[ième] sont explicitement au programme de terminale S et les autres ont doit les connaître.**

***Définition 3. Injection.***

La fonction *f* de *E* dans *F* est une injection signifie que tout $y\in F$ admet au plus un antécédent dans *E*.

***Conséquence.***

Si f est une injection de *E* dans *F*, c'est une bijection de $D_f$ dans l'ensemble des images de *f*.

***Exemple.***

La fonction sinus est une injection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.
La fonction sinus est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1\ ;1]$

## *II Cardinal.*

La notion de *cardinal* est au programme de terminale S et ES, mais pas le mot !!!
Je pense que cette notion est au programme du bachillerato de EL Salvador. Je vais vérifier.

***Définition***

Deux ensembles *E* et *F* ont le même cardinal signifie qu'il existe une bijection de *E* dans *F*.

***Cas particulier***

Si *E* est fini alors sont cardinal est son nombre d'éléments.

***Notation*** On note $Card(E)$

**Quelques résultats étonnants et tout à fait hors programme.**

$card(\mathbb{N})=card(\mathbb{Z})=card(\mathbb{Q})<card(\mathbb{R})=card(\mathbb{C})$

Je vous conseille si vous êtes intéressé par ce sujet de lire le numéro de « Pour la science » consacré à l'infini. Il devrait être bientôt commandé par le CDI.

Le premier résultat est facile à démontrer. Il suffit de choisir une bonne suite *u* par exemple :
$u$ définie par $u_{2p}=p$ et $u_{2p+1}=-p-1$ on obtient la suite :
$u_0=0,\ u_1=-1,\ u_2=1,\ u_3=-2,\ u_4=2,\ ...$

## *III Définition des notations mathématiques*

### *Accolades.*

Les accolades, { }, représentent un ensemble. Un ensemble n'est pas ordonné. {*a*, *b*} = {*b*, a}

*Exemple.* $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}=\{0,2,1,3,4,6,5,7,8,...\}$

### *Parenthèses.*

Les parenthèses, ( ), représentent une suite ordonnée. $(a,b)\neq(b,a)$

*Exemples.* Le couple de coordonnées dans le plan $(x,y)$. Le triplet de coordonnées dans l'espace $(x,y,z)$. Le quadruplet de coordonnées dans l'espace-temps $(x,y,z,t)$.

*Cas général.* S'il y a n éléments on le nomme n-uplet : $(a_1,a_2,...,a_n)$.

## *III Quelques ensembles.*

### *Ensemble produit.*

*Définitions*

*E* et *F* sont deux ensembles. L'ensemble produit $E\times F$ est l'ensemble des couples $(x,y)$ où *x* est un élément de *E* et *y* un élément de *F*.
$E\times F=\{(x,y),x\in E,y\in F\}$

On généralise à n ensembles.
$E_1\times E_2\times E_3\times...\times E_n=\{(x_1,x_2,...,x_n),x_i\in E_i \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant n\}$

On note $E^n$ l'ensemble produit des n-uplet ou n-listes de *E*.
$E^n=\{(x_1,x_2,...,x_n),x_i\in E \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant n\}$

*Exemples*

$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des coordonnées du point du plan. En géométrie analytique on calcule dans $\mathbb{R}^2$ au lieu de raisonner dans le plan.

$E=\{0,1,2,3\}$
L'ensemble produit $E^2$ est :
$E^2=\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

### *Arrangement.*

*Définition*

Soit un ensemble $E$ à n éléments. Un arrangement de $p$ éléments, $0 \leqslant p \leqslant n$, de $E$ est un p-uplet ou p-liste de $E^p$ où tous les éléments sont distincts deux à deux.
On dit aussi un arrangement de $p$ éléments parmi $n$.

*Exemple.*

$E=\{0, 1, 2, 3\}$
L'ensemble des arrangements de 2 éléments de $E$ est :
$A=\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2)\}$

### *Combinaison.*

*Définition*

Soit un ensemble $E$ à n éléments. Une combinaison de $p$ éléments, $0 \leqslant p \leqslant n$, de $E$ est un sous-ensemble de $p$ éléments de $E$.
On dit aussi une combinaison de $p$ éléments parmi $n$.

*Exemple.*

$E=\{0, 1, 2, 3\}$
L'ensemble des combinaisons de 2 éléments de $E$ est :
$C=\{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

## *III Correspondance entre expérience et type d'ensemble.*

Une urne contient n boules numérotées.

### *Espace produit.*

*Expérience.* On tire p boules l'une après l'autre en remettant la boule tirée dans l'urne entre chaque tirage.

*Analyse de l'expérience.* L'ordre compte, il y a répétition donc c'est un ensemble produit.

*Univers.* $\Omega=E^p$

*Remarque.* $p$ peut être supérieur à $n$.

### *Arr*angement.

*Expérience.* On tire p boules l'une après l'autre sans remettre la boule tirée dans l'urne entre chaque tirage.

*Analyse de l'expérience.* L'ordre compte, il n'y a pas répétition donc c'est un arrangement.

*Univers.* $\Omega=\{(x_1,\ldots,x_p),\text{ pour } i\neq j, x_i\neq x_j\}$

*Remarque.* $p\leqslant n.$

***Combinaison.***

*Expérience.* On tire p boules en même temps.

*Analyse de l'expérience.* L'ordre ne compte pas, il n'y a pas répétition donc c'est une combinaison.

*Univers.* $\Omega=\{\{x_1,\ldots,x_p\},\text{ pour } i\neq j, x_i\neq x_j\}$

*Remarque.* $p\leqslant n.$

## *IV Dénombrement.*

Attention, il y a toujours une grande confusion entre le cardinal ( nombre d'éléments ) d'un ensemble et l'ensemble lui-même. On trouve souvent ce type d'erreur dans les copies. Donc faites attention et ne dites pas ~~l'univers est 12~~, c'est un non-sens.

*E* est un ensemble de n éléments. $Card(E)=n.$

***Nombre d'éléments de l'espace produit ou nombre de p-uplets.***

$E^P$ a $n^P$ éléments. $Card(E^p)=n^P=(Card(E))^p$

Si on compte le nombre de cas possibles de l'expérience. Il y a *n* choix pour le premier tirage, *n* pour le second, ... , *n* pour le p$^{\text{ième}}$ donc $n^p$ en tout.

***Nombre d'arrangements.***

Pour calculer le nombre d'arrangements de *n* élément parmi *p* ils faut enlever tous les p-uplets de l'espace produit qui ont au moins deux éléments égaux.
C'est très compliqué et donc pas une bonne méthode. Mais on peut le faire avec un risque d'erreur proche de 100%.

Si on compte le nombre de cas possibles de l'expérience. Il y a *n* choix pour le premier tirage, $n-1$ pour le second, $n-2$ pour le troisième , ... , $n-p+1$ pour le p$^{\text{ième}}$ donc $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1)$ en tout.
On note le **nombre** d'arrangements de *p* éléments parmi *n* : $A_n^p$

*Factoriel n.*

On appelle factoriel *n*, le nombre noté $n!$, égal au produit des *n* premiers naturels non nuls.
$n!=1\times2\times3\times4\times\ldots\times(n-1)\times n$
Par convention : **0! = 1**

*Formule.* $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}A_n^p &= n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-p+1)\\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-p+1)\frac{(n-p)(n-p-1)\dots 3\times 2\times 1}{(n-p)(n-p-1)\dots 3\times 2\times 1}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\dots 3\times 2\times 1}{(n-p)(n-p-1)\dots 3\times 2\times 1}\\ &= \frac{n!}{(n-p)!}\end{aligned}$$

*Remarques importantes.*

Le nombre de façons d'ordonner $p$ éléments est : $A_p^p = p!$

Le nombre d'arrangement de *0* éléments est : $A_0^0 = A_1^0 = A_n^0 = 1$ Le seul arrangement possible est l'ensemble vide $\emptyset$

## *Nombre de combinaisons.*

Une combinaison est dans le désordre, ou plutôt, dans une combinaison l'ordre ne compte pas. C'est un sous-ensemble de $p$ éléments de $E$.

On vient de voir que le nombre de façons d'ordonner $p$ éléments est $A_p^p = p!$ donc à chaque combinaison correspond $p!$ arrangements.

Nombre de combinaisons de p éléments parmi n $\times p! = A_n^p$

*Notation.*

La nouvelle notation officielle pour le nombre de combinaisons de $p$ éléments parmi $n$ est $\binom{n}{p}$ et l'ancienne notation est $C_n^p$ sur le même modèle que $A_n^p$

Faites attention à l'écriture dans $\binom{n}{p}$ $p$ est le pus petit et $n$ le plus grand.

*Formule.* $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

*Remarques importantes.*

Le nombre de combinaisons de *0* éléments est : $\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{n}{0} = 1$ La seule combinaison possible est l'ensemble vide $\emptyset$

Le nombre de combinaisons de $n$ éléments parmi $n$ est : $\binom{n}{n} = 1$ La seule combinaison possible est l'ensemble tout entier.

***Dénombrement et opérations dans les ensembles.***

Soit $E$ un ensemble et $A$ et $B$ deux sous-ensembles.

$\overline{A}$ est le complémentaire de $A$ dans $E$ ou l'évènement contraire en probabilité.
$\overline{A}=E \setminus A = E - A$
$card(\overline{A})=card(E)-card(A)$

$card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$

## V Propriétés des $\binom{n}{p}$

*Théorème. Symétrie des* $\binom{n}{p}$

$\binom{n}{n-p}=\binom{n}{p}$

*Démonstration.*
A chaque combinaison $C$ de $p$ éléments parmi $n$ on fait correspondre la combinaison $\overline{C}$ de $n$-$p$ éléments parmi $n$.
Ou, choisir $p$ éléments (sans ordre) c'est en « éliminer » $n$-$p$.

*Théorème. Formule de récurrence des* $\binom{n}{p}$

Avec la convention : si p est négatif, ou p > n alors $\binom{n}{p}$ = 0.

Pour tout $n\geqslant 1$, $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$

*Démonstration.*
Remarque préliminaire. Si $p$ = 0 en appliquant la convention la formule est vérifiée.

Soit un ensemble $E$ à $n$ éléments et $p\geqslant 0$.
Je choisis un élément $a$. J'appelle $F=\overline{\{a\}}$ l'ensemble des éléments restants.
Les combinaisons ne contenant pas $a$ sont des combinaisons de $F$, il y en a $\binom{n-1}{p}$ . (Si $p = n$ il n'y a aucune combinaison ne contenant pas $a$ et $\binom{n-1}{n}=0$ par convention, donc « ça marche »)
Les combinaisons contenant $a$ sont l'union de $\{a\}$ et d'une combinaison de $p$-1 éléments de $F$, il y en a $\binom{n-1}{p-1}$
Donc la formule est vérifiée.

*Conséquence. Le triangle de Pascal.*

En se servant de la formule de récurrence ci-dessus on calcule les valeurs de $\binom{n}{p}$ .
$n$ est le rang de la ligne. On commence à 0.

*p* est le rang de la colonne. On commence à 0.
Pour calculer une valeur on additionne la valeur située au dessus ( 0 s'il n'y a rien, cela correspond à la convention) à la valeur précédant cette dernière ( 0 si c'est le rang de *n,* cela correspond à la convention).

| n\p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | | | | | | | | | | |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 | | | | | | | | | |
| 11 | 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1 | | | | | | | | |
| 12 | 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 | 12 | 1 | | | | | | | |
| 13 | 1 | 13 | 78 | 286 | 715 | 1 287 | 1 716 | 1 716 | 1 287 | 715 | 286 | 78 | 13 | 1 | | | | | | |
| 14 | 1 | 14 | 91 | 364 | 1 001 | 2 002 | 3 003 | 3 432 | 3 003 | 2 002 | 1 001 | 364 | 91 | 14 | 1 | | | | | |
| 15 | 1 | 15 | 105 | 455 | 1 365 | 3 003 | 5 005 | 6 435 | 6 435 | 5 005 | 3 003 | 1 365 | 455 | 105 | 15 | 1 | | | | |
| 16 | 1 | 16 | 120 | 560 | 1 820 | 4 368 | 8 008 | 11 440 | 12 870 | 11 440 | 8 008 | 4 368 | 1 820 | 560 | 120 | 16 | 1 | | | |
| 17 | 1 | 17 | 136 | 680 | 2 380 | 6 188 | 12 376 | 19 448 | 24 310 | 24 310 | 19 448 | 12 376 | 6 188 | 2 380 | 680 | 136 | 17 | 1 | | |
| 18 | 1 | 18 | 153 | 816 | 3 060 | 8 568 | 18 564 | 31 824 | 43 758 | 48 620 | 43 758 | 31 824 | 18 564 | 8 568 | 3 060 | 816 | 153 | 18 | 1 | |
| 19 | 1 | 19 | 171 | 969 | 3 876 | 11 628 | 27 132 | 50 388 | 75 582 | 92 378 | 92 378 | 75 582 | 50 388 | 27 132 | 11 628 | 3 876 | 969 | 171 | 19 | 1 |

*Théorème. Somme des* $\binom{n}{p}$ *pour n fixé.*

Pour tout $n \geqslant 0$, $\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+...+\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}=2^n$

*Démonstration.*
On peut le démontrer par récurrence sur *n*. Mais il y a plus élégant.
Soit *E* un ensemble à *n* éléments. Cette somme est le nombre de sous ensembles de *E* ( ou somme du nombre des combinaisons à 0, à 1, ... , n éléments parmi n).
Pour construire un sous-ensemble, pour chaque élément j'ai deux choix, je le prends ou je ne le prends pas. Donc il y a en tout $2^n$ choix et $2^n$ sous-ensembles.

*Théorème. Développement du binôme.*

Pour tout $n \geqslant 0$,

$$(a+b)^n=\binom{n}{n}a^n+\binom{n}{n-1}a^{n-1}b+\binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2+...+\binom{n}{2}a^2\,b^{n-2}+\binom{n}{1}a\,b^{n-1}+\binom{n}{0}b^n$$

*Démonstration.*

En développant $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n\ facteurs}$ pour obtenir un terme de la forme $a^{n-p}b^p$ il faut choisir $n-p$ facteurs parmi les *n,* dans lesquels on choisit *a,* dans ceux qui restent on choisit *b. L*'ordre dans le choix des facteurs ne compte pas donc à chaque combinaison de $n-p$ facteurs parmi *n* correspond un terme $a^{n-p}b^p$ du développement. Il y a $\binom{n}{n-p}$ termes $a^{n-p}b^p$ d'où le résultat.

*Remarques.*

La formule de la somme des $\binom{n}{p}$ pour *n* fixé est une conséquence directe de ce dernier théorème. Il suffit de choisir *a* = *b* = 1. Mais je ne peux pas résister à présenter une démonstration si élégante. Et surtout il est bon de savoir qu'un ensemble de cardinal *n* a $2^n$ sous ensembles.

Alors qu'on est dans une théorie calculatoire, dénombrement, aucune démonstration ne fait appel au calcul. Prenez-en de la graine (je m'adresse aux élèves), et prenez le temps de réfléchir avant de vous lancer dans un calcul à l'issue douteuse.

Par contre je vous demande, pour vous entraîner à manipuler les factorielles, de démontrer les théorèmes, s*ymétrie des* $\binom{n}{p}$ *et formule de récurrence des* $\binom{n}{p}$ , par un calcul direct puis, s*omme des* $\binom{n}{p}$ *pour n fixé et développement du binôme,* par récurrence.

Hors programme. A propos des cardinaux et du nombre de sous-ensembles. On a démontré que l'ensemble des sous-ensemble de $\mathbb{N}$ noté $P(\mathbb{N})$ est en bijection avec $\mathbb{R}$

$$Card\,(P(\mathbb{N})) = Card\,(\mathbb{R}) > Card\,(\mathbb{N})$$