Fonction dérivée.

I Nombre dérivé.

1 Définition.

f est dérivable en *a* appartenant au domaine de définition si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et est un nombre réel.
Dans ce cas on note $f'(a)$ cette limite et on l'appelle le nombre dérivé de *f* en *a*.

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$$

Remarques. On peut encore écrire $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.
(En remplaçant $a + h$ par x : $x = a + h \Rightarrow x - a = h$)

Si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est infinie la fonction n'est pas dérivable en *a*.

2 Graphiquement

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *C* est la courbe de *f*. A le point de la courbe de coordonnées $(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$ un point mobile de la courbe.

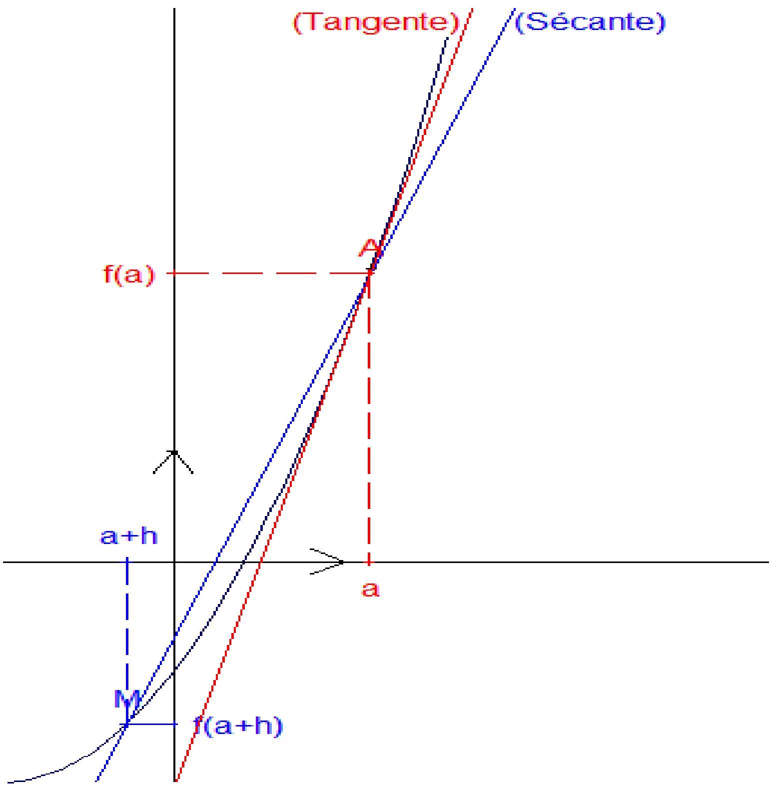
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AM).

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en A.

Quand M tend vers A la sécante tend vers une droite limite qui a un seul point commun avec la courbe (M et A sont confondus).

Cette droite limite est appelée la tangente en A à la courbe. Son coefficient directeur est $f'(a)$, la limite du coefficient directeur de la sécante quand h tend vers 0 donc quand M tend vers A.

Remarque.
Sur ce graphique h est un nombre négatif.



3 Développement limité d'ordre 1.

Définition

Une fonction f est différentiable en $a \in D_f$ signifie qu'il existe un fonction linéaire g $(g : x \to px)$ et une fonction ε tel que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ vérifiant dés que h est assez petit :

$$f(a+h) = f(a) + g(h) + h\varepsilon(h) \text{ ou encore } f(a+h) = f(a) + ph + h\varepsilon(h)$$

Exemple 1

Soit $f : x \to x^2$ pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2\ ah + h^2$$
$$= f(a) + 2\text{a}\,h + h \times h$$

Dans cet exemple g est la fonction $x \to 2\ a\,x$ $(p = 2\ a)$ et ϵ la fonction $x \to x$.

Exemple 2

Soit $f : x \to x^3$ pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$f(a+h) = (a+h)^3 = a^3 + 3\ a^2\ h + 3\ h^2\ a + h^3$$
$$= f(a) + 3\ a^2\ h + h(3\ a\,h + h^2)$$

Dans cet exemple
g est la fonction $x \to 3\ a^2\ x$ $(p = 3\ a^2)$ et ϵ la fonction $x \to 3\ a\,x + x^{2.}$

Remarque

On remarque que dans ces deux exemples *p* est le nombre dérivé en *a*.

Equivalence entre dérivabilité et différentiabilité

La dérivabilité implique la différentiabilité dans $\mathbb{R}$

Soit *f* une fonction dérivable en *a* :

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)}$$

donc pour *h* assez petit $\boxed{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h) \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0}$

$$\boxed{f(a+h) - f(a) = f'(a)h + h\varepsilon(h)}$$
$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)}$$

f est différentiable en *a*, g est la fonction $x \to f'(a)x$ et $p = f'(a)$.

Réciproque

Soit *f* une fonction différentiable en *a* :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + p\,h + h\varepsilon(h)}$$
$$\boxed{f(a+h) - f(a) = p\,h + h\varepsilon(h)}$$

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=p+\varepsilon(h)}$$

$$\boxed{\lim_{h\to0}\epsilon(h)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}p+\varepsilon(h)=p}$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a)=p$.

Développement limité.

En remplaçant $(a+h)$ par x on obtient :

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+(x-a)\varepsilon(x-a) \text{ avec } \lim_{x\to a}\varepsilon(x-a)=0$$

$f(a)+f'(a)(x-a)+(x-a)\varepsilon(x-a)$ est le développement limité d'ordre 1 de f en a.

Pour x assez proche de a : $f(x)\simeq f(a)+f'(a)(x-a)$

$f(a)+f'(a)(x-a)$ est l'approximation affine de $f(x)$ pour x proche de a.

Théorèmes à savoir.

Théorème 1

Une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1.

Théorème 2

Une fonction dérivable en a est continue en a.

Démonstration.

f est dérivable en a donc elle admet un développement limité d'ordre 1 en a.

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0 \;\Rightarrow\; \lim_{h\to0}h\varepsilon(h)=0\\ \lim_{h\to0}hf'(a)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{h\to0}f(a+h)=\lim_{h\to0}f(a)+\lim_{h\to0}hf'(a)+h\varepsilon(h)=f(a)$$

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ donc f est continue en a.

II Fonction dérivée.

1 Définition.

Soit f dérivable pour tout x de I. La fonction dérivée de f sur I est la fonction f' définie par
$f': x \longrightarrow f'(x)$ (nombre dérivé de f en x).

2 Fonctions dérivables.

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sauf les fonctions racine carrée en 0 et valeur absolue en 0.

3 Formules de dérivation.

a Dérivée d'une fonction composée.

Les fonctions f et u sont dérivables sur des intervalles convenables (de telle façon que *f(u)* soit dérivable).

$\boxed{(f \circ u)' = (f(u))' = u' f'(u)}$ Voir la démonstration à la fin du cours.

Pratiquement.
Dans une formule de dérivation si on remplace la variable x par une fonction u il faut multiplier la formule par u', fonction dérivée de u.

b Dérivées des fonctions usuelles.

f	$f\,'$		f	$f\,'$
k	0			
x	1		u	$u\,'$
x^2	$2\ x$		u^2	$2\ u\,'u$
x^3	$3\ x^2$		u^3	$3\ u\,'u^2$
x^n	$n\,x^{n-1}$		u^n	$n\,u\,'u^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$		$\frac{1}{u}$	$\frac{-u\,'}{u^2}$
$\frac{1}{x^2}=x^{-2}$	$\frac{-2}{x^3}=-2\ x^{-3}$		$\frac{1}{u^2}=u^{-2}$	$\frac{-2\ u\,'}{u^3}=-2\ u\,'u^{-3}$
$\frac{1}{x^n}=x^{-n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}=-n\,x^{-n-1}$		$\frac{1}{u^n}=u^{-n}$	$\frac{-n\,u\,'}{u^{n+1}}=-n\,u\,'u^{-n-1}$
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\ \sqrt{x}}=\frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}$		$\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$	$\frac{u\,'}{2\ \sqrt{u}}=\frac{1}{2}\,u\,'u^{\frac{-1}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{-1}{2}}$	$\frac{-1}{2\ (\sqrt{x})^3}=\frac{-1}{2}\,x^{\frac{-3}{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{u}}=u^{\frac{-1}{2}}$	$\frac{-u\,'}{2\ (\sqrt{u})^3}=\frac{-u\,'}{2}\,u^{\frac{-3}{2}}$

c Dérivées et opérations.

k est un nombre constant. u et v sont des fonctions.

Somme : $\boxed{(u+v)\,'=u\,'+v\,'}$

Produit : $\boxed{(uv)\,'=u\,'v+uv\,'}$

$\boxed{\text{Si } k \text{ est une constante } .(ku)\,'=k\,u\,'}$

Rapport : $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u\,'v-u\,v\,'}{v^2}}$

$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u\,'}{u^2}}$

4 Démonstration de $\boxed{(f\circ u)'=(f(u))'=u'f'(u).}$ Hors programme.

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f\circ u(x)-f\circ u(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{f(u(x))-f(u(a))}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(u(x))-f(u(a))}{u(x)-u(a)}\ \ \frac{u(x)-u(a)}{x-a}\end{aligned}}$$

La fonction *u* est dérivable donc continue, quand *x* tend vers *a* alors *u(x)* tend vers *u(a)* donc :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(u(x))-f(u(a))}{u(x)-u(a)}=\lim_{u(x)\to u(a)}\frac{f(u(x))-f(u(a))}{u(x)-u(a)}=f'(u(a))$$

La fonction *u* est dérivable donc : $\lim_{x\to a}\frac{u(x)-u(a)}{h}=u'(a)$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(u(x))-f(u(a))}{u(x)-u(a)}\ \ \frac{u(x)-u(a)}{x-a}&=\lim_{u(x)\to u(a)}\frac{f(u(x))-f(u(a))}{u(x)-u(a)}\ \ \lim_{x\to a}\frac{u(x)-u(a)}{x-a}\\&=f'(u(a))\ \ u'(a)\end{aligned}$$

Donc pour tout a : $(f\circ u)'(a)=f'\circ u(a)\ \ u'(a)$