Plan d'étude d'une fonction.

1 Recherche de l'ensemble de définition

Fonctions rationnelles.

$f(x)$ existe si le dénominateur n'est pas nul.

Fonctions avec radical du type $\sqrt[2n]{\ }$.

$f(x)$ existe si la quantité sous le radical est positive.

Fonctions logarithme.

$\ln(u)$ existe si $u > 0$.

2 Recherche de la parité, de la périodicité.

Parité.

Condition nécessaire. D_f est symétrique par rapport à 0.
On compare $f(x)$ et $f(-x)$.

Définition. Si pour tout x de D_f, $f(-x)=f(x)$ alors f est paire.
Si pour tout x de D_f, $f(-x)=-f(x)$ alors f est impaire.

Théorème. Si f est paire sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Si f est impaire sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

Conséquence. Dans les deux cas on étudie f sur $\mathbb{R}^+ \cap D_f$. On complète le tableau de variations par symétrie.

Exemples. Fonctions paires : toutes les fonctions constantes, « puissance pair » et cosinus.
Fonctions impaires : toutes les fonctions « puissance impaire » et sinus, tangente, cotangente.

Périodicité.

Définition. f est périodique signifie qu'il existe un nombre $S \neq 0$ tel que :
$x \in D_f \Rightarrow x+S \in D_f$ et $f(x+S)=f(x)$
La période T est le plus petit nombre strictement positif qui vérifie la propriété ci-dessus.

Remarque. On élimine les fonctions constantes car dans ce cas T=0.

Conséquence. Dans les deux cas on étudie f sur la période $\left[\frac{-T}{2};\frac{T}{2}\right] \cap D_f$ afin de restreindre encore l'intervalle d'étude si la fonction est paire ou impaire.
On complète le tableau de variations par translations de vecteur de $T\vec{i}$.

Exemples. Les fonctions circulaires sinus, cosinus, tangente et cotangente sont périodiques.
Pour $k \neq 0$,

$\sin(kx)$ et $\cos(kx)$ ont pour période $2\frac{\pi}{|k|}$

$\tan(kx)$ et $\cot an(kx)$ ont pour période $\frac{\pi}{|k|}$.

2 bis Recherche des centres ou axes de symétrie.

Théorème. La droite d d'équation $x=b$ est un axe de symétrie de la courbe si et seulement si pour tout $x \in D_f$ $f(2b-x)=f(x)$.

Démonstration.

Condition nécessaire.

Soit deux points de la courbe A et A', $x_A < x_{A'}$, symétriques par rapport à *d.* Ils sont à égale distance de *d.* Notons *a* cette distance. Les points *A* et *A'* on pour abscisse respective $b-a$ et $b+a$ et même ordonnée.

$f(b-a)=f(b+a)$. Posons $x=b+a$ ou encore $-a=b-x$ donc

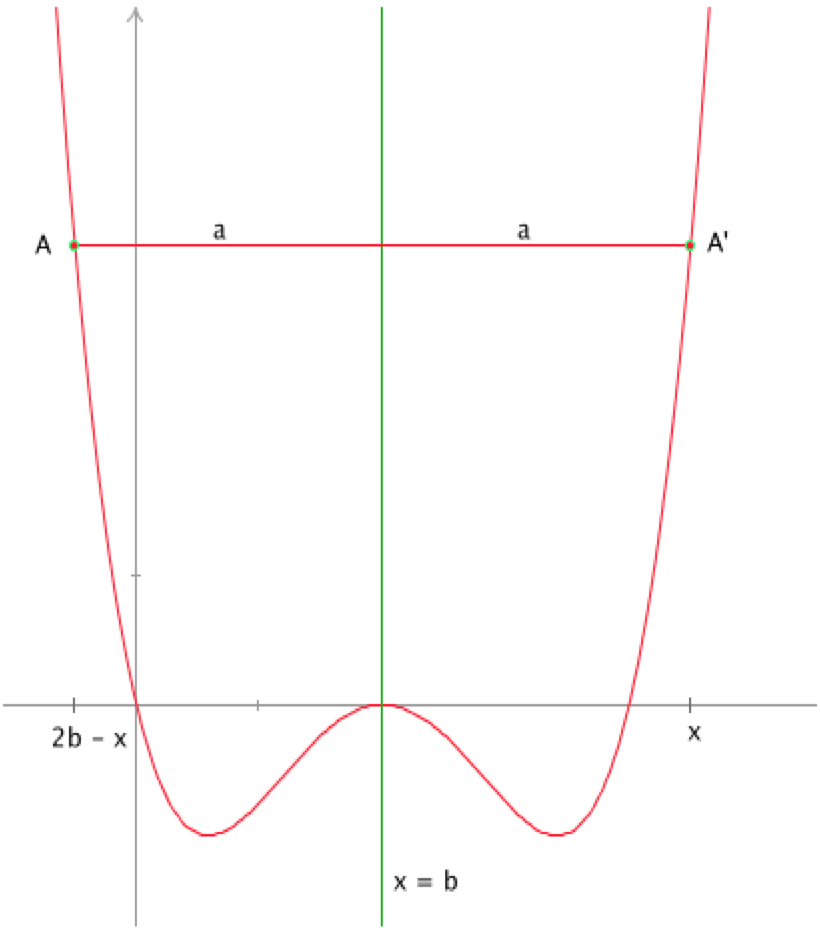
$f(2b-x)=f(x)$

Condition suffisante.

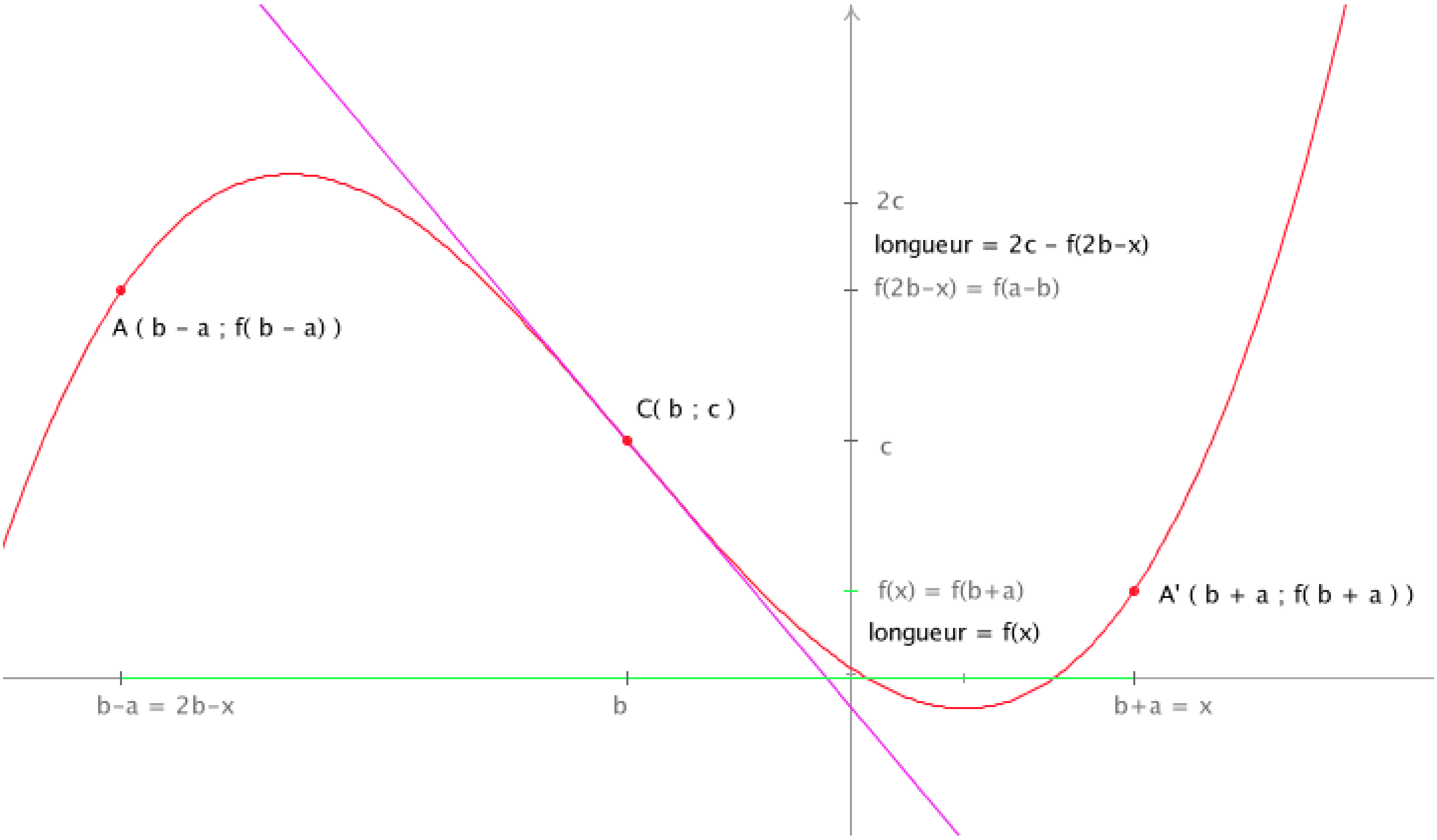
Il suffit de « remonter » le calcul.

Pour tout $x \in D_f$, $f(2b-x)=f(x)$

Posons $x=b+a$ ou encore $-a=b-x$ donc pour tout a (dans un bon ensemble) $f(b-a)=f(b+a)$. La courbe admet *d* comme axe de symétrie.



Théorème. Le point $S(b\,;c)$ est un centre de symétrie de la courbe si et seulement si pour tout $x \in D_f$ $2c - f(2b-x) = f(x)$.



Démonstration laissée au lecteur.

Un dessin vaut des fois mieux qu'une explication. Par symétrie les longueurs $2c - f(2b-x)$ et $f(x)$ sont égale (dans le cas où $f(x)$ est négatif on prends l'opposé des longueurs).

3 Recherche des limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Voir le cours sur les limites.

On en déduit l'existence d'asymptotes horizontales et verticales.

Si la limite en l'un des infinis est infini, on cherche s'il existe une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

En terminale S, l'existence d'une asymptote oblique n'est pas au programme (n'est plus) mais on doit savoir qu'une fonction du type $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$ admet *d* d'équation $y = ax + b$ comme asymptote oblique.

Exemple.

$f(x) = \dfrac{4x^2 + 5x + 3}{2x+1} = 2x + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2(2x+1)}$ admet *d* d'équation $y = 2x + \dfrac{3}{2}$ comme asymptote oblique.

4 Etude de la continuité.

On verra cette notion dans un prochain chapitre.

5 Etude de la dérivabilité.

Définition. Voir le cours sur le nombre et la fonction dérivés.

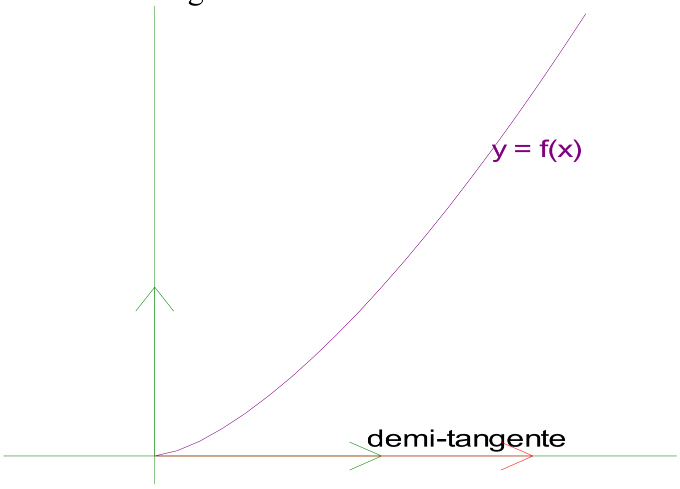
Où faire l'étude ? Les fonctions usuelles sont dérivables sur l'ensemble de définition sauf racine et valeur absolue (le cas de la partie entière est à part, elle n'est pas continue sur les entiers). Donc les seuls cas d'étude sont : $\sqrt{u}$ et $|u|$ en $u=0$ ou les fonctions définies par intervalles (on verra des exemples en exercices).

Exemple. Dérivabilité de *f* définie par : $x \to \sqrt{x^3}$ en 0.

$D_f = [0 ; +\infty[$ donc on cherche la limite pour $h > 0$.

$$h>0 \Rightarrow \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h^3}}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}.$$

$\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \sqrt{h} = 0 = f'(0)$ *f* est dérivable en 0 et sa courbe admet à l'origine une demi-tangente horizontale.



6 Etude des variations.

Définitions. *f* est définie sur *I*.

Croissance. *f* est croissante sur *I* si elle respecte (ne change pas) l'ordre ($\leqslant$ ou $\geqslant$).
Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$ et $x_1 \in I$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Décroissance. *f* est décroissante sur *I* si elle change l'ordre.
Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$ et $x_1 \in I$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Croissance stricte. *f* est strictement croissante sur *I* si elle respecte l'ordre strict (< ou >).
Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$ et $x_1 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Décroissance stricte. *f* est strictement décroissante sur *I* si elle change l'ordre strict (< ou >).
Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$ et $x_1 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

"Constance". f est constante sur I si
pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$ et $x_1 \in I$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Remarque importante.
L'ordre de x_1 et x_2 importe peu. On peut choisir x_1 supérieur à x_2 ou inférieur.
Pour savoir si f est croissante ou décroissante on compare l'ordre des x et l'ordre des images.

Etude directe à l'aide de la définition.

Allez voir le cours de seconde sur les variation d'une fonction.

Etude à l'aide de la fonction dérivée.

Théorème. Si $f' > 0$ sur l'intervalle *I* alors *f* est strictement croissante sur *I*.

Démonstration. Soit $a \in I$ et $f'(a) > 0$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

La limite est positive donc pour $|h|$ assez petit, $0 < |h| < \varepsilon$, (voir le cours sur les limites, paragraphe II 2 : signe) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$ donc *f* respecte l'ordre sur l'intervalle $J =]a - \varepsilon ; a + \varepsilon[\cap I$ et *f* est croissante sur *J*.
On a choisi $a \in I$ quelconque donc *f* est croissante sur *I*.

Théorème. Si $f' \geqslant 0$ sur l'intervalle *I* et ne s'annule quand un nombre fini de valeurs alors *f* est strictement croissante sur *I*.

Exemple. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème. Si $f' \leqslant 0$ sur l'intervalle *I* et ne s'annule quand un nombre fini de valeurs alors *f* est strictement décroissante sur *I*.

Théorème. Si $f' = 0$ sur l'intervalle I alors f est constante sur *I*.

Démonstration. Les seuls fonctions dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes.

7 Calcul des extrema.

On calcule les maxima (pluriel de maximum) et les minima (pluriel de minimum) s'ils existent.

8 Tableau de variations.

Le tableau doit être complet.
Sur la première ligne, l'ensemble de définition. Vérifier bien l'énoncé. Sur quel ensemble travaille-t-on ?
Sur la deuxième ligne (obligatoire), le signe de la dérivée. Double barre si la fonction n'est pas dérivable en une valeur de l'ensemble de définition.
Sur la troisième ligne, les limites, les extrema.
Et on vérifie la cohérence des résultats.

9 Tracé de la courbe au crayon de papier.

On commence par choisir un repère adapté.
On trace les asymptotes.
On trace les tangentes représentées par des doubles flèches (←→) centrées sur le point de tangence.
On trace la courbe.