Fonction exponentielle. Première approche.

On veut résoudre l'équation différentielle du premier ordre $\varphi=\varphi'$.
φ est une fonction réelle à variable réelle dérivable et vérifiant $\varphi(0)=1$.
On admet pour le moment l'existence d'une telle fonction définie sur tout $\mathbb{R}$.
Le devoir sur les suites adjacentes permet trouver un candidat. Il restera à démontrer que ce candidat est dérivable.

I Approximation de φ par une fonction f, affine par intervalles, par la méthode d'Euler.

1 Approximation de $\varphi(h)$.

φ est dérivable donc elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0.
Pour *h* petit (proche de 0), il existe une fonction ε tel que :

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0 \text{ et } \varphi(h)=\varphi(0)+\varphi'(0)h+h\varepsilon(h).$$

Donc pour *h* petit fixé : $\varphi(h)\simeq\varphi(0)+\varphi'(0)h$.
Par hypothèse $\varphi=\varphi'$ et $\varphi(0)=1$ donc $\varphi(0)=\varphi'(0)=1$ et $\varphi(h)\simeq 1+h$.
On pose donc $f(0)=1$ et $f(h)=1+h$

Graphiquement

On trace pour un *h* fixé, par exemple $h=\frac{1}{10}$, le segment d'extrémités $J(0,1)$ et $M_1(h,1+h)$.

La droite d'équation $y=1+x$ est la tangente à la courbe de φ si φ existe car pour le moment on ne sait pas si l'équation a des solutions.

2 Approximation de $\varphi(2h)$.

φ est dérivable donc elle admet un développement limité d'ordre en *h*.
Pour *h* petit $\varphi(h+h)\simeq\varphi(h)+\varphi'(h)h$.
On sait que $\varphi=\varphi'$ et $\varphi(h)\simeq 1+h$ donc $\varphi(h)=\varphi'(h)\simeq 1+h$ et $\varphi(2h)\simeq 1+h+(1+h)h=(1+h)^2$.
On pose donc $f(2h)=(1+h)^2$

Graphiquement

On trace le segment d'extrémité $M_1(h,1+h)$ et $M_2(2h,(1+h)^2)$

3 Itération du procédé.

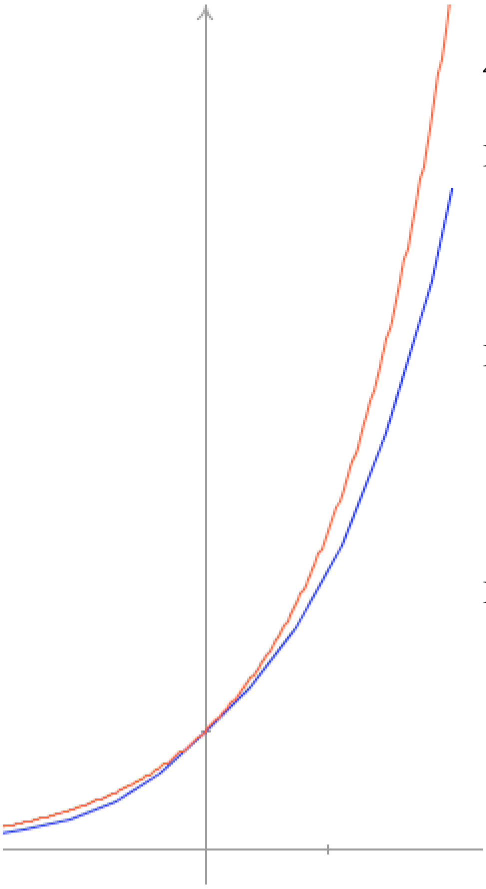
Pour *h* petit $\varphi(3h)=\varphi(2h+h)\simeq\varphi(2h)+\varphi'(2h)h\simeq(1+h)^2+(1+h)^2h=(1+h)^3$
$\varphi(nh)=\varphi((n-1)h+h)\simeq\varphi((n-1)h)+\varphi'((n-1)h)h\simeq(1+h)^{n-1}+(1+h)^{n-1}h=(1+h)^n$

On pose donc $f(ph)=(1+h)^p$

4 Graphiquement

On trace les segment d'extrémité $M_{p-1}((p-1)h,(1+h)^{p-1})$ et $M_p(p\,h,(1+h)^p)$ pour p variant de 3 à n.

On obtient les courbes ci-dessous pour $h=\frac{1}{5}$ et $h=\frac{1}{50}$, des fonctions affines par intervalles sur l'intervalle [-2,2].



Approximation de $\varphi(1)$.

Pour $h=\frac{1}{10}$:

$$\varphi(1)\simeq f(1)=f\left(10\ \frac{1}{10}\right)=\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}\simeq 2{,}593\ 742$$

Pour $h=\frac{1}{100}$:

$$\varphi(1)\simeq\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\simeq 2{,}704\ 813$$

Pour $h=\frac{1}{1000}$:

$$\varphi(1)\simeq\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}\simeq 2{,}716\ 923$$

5 Remarque importante.

La fonction f vérifie la relation $f(2\ h)=(f(h))^2$ et plus généralement $f(ph+qh)=f(ph)f(qh)$, f est une approximation de φ. On peut conjecturer que φ vérifie ces mêmes relations.

II Propriétés de φ

1 $\varphi(-x)=\frac{1}{\varphi(x)}$

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\varphi(x)\varphi(-x)$
$g'(x)=\varphi'(x)\varphi(-x)-\varphi(x)\varphi'(-x)$.
$\varphi=\varphi'$ donc $g'(x)=0$ et la fonction g est constante.

$g(0)=\varphi(0)\varphi(0)=1$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)\varphi(-x)=1$ et $\varphi(-x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$

Conséquence : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{\varphi(x)\neq 0}$
$\varphi(x)\varphi(-x)=1$ d'où le résultat.

Remarque. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, φ est continue et ne s'annule pas donc elle est de signe constant. $\varphi(0)=1$ donc φ est strictement positive.
La démonstration (par l'absurde en posant $\varphi(a)<0$ *et* $\varphi(b)>0$) est laissé aux bons soins du lecteur.
On verra une autre façon de démontrer que la fonction est strictement positive.

2 Unicité.

Soit ψ une autre solution de l'équation différentielle. $\psi'=\psi$ et $\psi(0)=1$

La méthode est d'écrire $\psi=h\varphi$ et de démontrer que la fonction *h* est constante et égale à 1.

Première étape, on définit la fonction *h*.

La fonction φ ne s'annule pas donc en posant $h=\dfrac{\psi}{\varphi}$ on peut écrire ψ sous la forme $\psi=h\varphi$.

Deuxième étape, $\boldsymbol{h(x)=1}$

$\psi'=h'\varphi+h\varphi'$
$\varphi'=\varphi$ et $\psi'=\psi$ donc $\psi=h'\varphi+h\varphi$
$\psi=h\varphi$ donc $h\varphi=h'\varphi+h\varphi$ et $h'\varphi=0$
$h'\varphi=0$ et φ ne s'annule jamais donc h' est la fonction nulle et *h* est constante.

$\psi(0)=h(0)\varphi(0)$, $\psi(0)=1=\varphi(0)$ $\Rightarrow$ $h(0)=1$
h est constante donc pour tout $x\in\mathbb{R}, h(x)=1$ et $\psi=\varphi$. La solution est unique.

3 Propriété fondamentale, $\boldsymbol{\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)}$

Soit y un réel, la fonction φ ne s'annule pas donc on peut poser : $\psi(x)=\dfrac{\varphi(x+y)}{\varphi(y)}$

$\psi'(x)=\dfrac{\varphi'(x+y)}{\varphi(y)}=\dfrac{\varphi(x+y)}{\varphi(y)}=\psi(x)$ et $\psi(0)=\dfrac{\varphi(y)}{\varphi(y)}=1$
ψ est solution de l'équation différentielle, la solution est unique donc $\psi=\varphi$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\dfrac{\varphi(x+y)}{\varphi(y)}$ et $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$, on a choisit *y* quelconque donc cette relation est vrai pour tout couple $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

4 Conséquences.

φ est strictement positive.

φ ne s'annule pas et d'après la propriété fondamentale :

$$\varphi(x)=\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left(\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2>0$$

On démontre par récurrence : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(x)=\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$

On en déduit : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(-x)=\frac{1}{\varphi(x)}=\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{-n}$

Pour *x* fixé. φ est dérivable en 0 donc admet un développement limité d'ordre 1. Si *n* est assez grand alors $\frac{x}{n}$ est proche de 0 et $\varphi(\frac{x}{n})=1+\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)=0$ donc $\varphi(\frac{x}{n})\simeq 1+\frac{x}{n}$ et $\varphi(x)=\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n\simeq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\varphi(x)$.

III La fonction exponentielle.

1 Définition de la fonction exponentielle.

Définition. On appelle fonction exponentielle l'unique solution de l'équation différentielle $\varphi=\varphi'$ tel que $\varphi(0)=1$ et $D_\varphi=\mathbb{R}$. On la note exp. Le nombre exp(1) est noté e.

On a vu dans le dans le ***I*** que $e\simeq 2{,}72$

2 Autre écriture de la fonction exponentielle.

Rappel. Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ et tout $b\in\mathbb{N}$, , $\sqrt[b]{x}=x^{\frac{1}{b}}$

La fonction exponentielle vérifie les relations $\exp(1)=e$, $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$ donc $\exp(2)=\exp(1+1)=e^2$

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$ démontrons par récurrence la propriété P_n :

$\exp(xn)=\exp^n(x)=(\exp(x))^n$

Initialisation.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)\neq 0$, donc $\exp(0\ x)=1=(\exp(x))^0$ P_0 est vraie

Hérédité.

Supposons P_n vraie : $\exp(xn)=\exp^n(x)$

En appliquant la relation fondamentale, $\exp((n+1)x)=\exp(nx)\exp(x)$
En appliquant P_n il vient $\exp((n+1)x)=\exp^n(x)\exp(x)=\exp^{n+1}(x)$
$P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\exp(nx)=\exp^n(x)$

Conséquence.
$\exp(-y)=\dfrac{1}{\exp(y)}$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\exp(-nx)=\dfrac{1}{\exp(nx)}=\dfrac{1}{\exp^n(x)}=\exp^{-n}(x)$
Pour tout n $\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{R}$, $\exp(nx)=\exp^n(x)$

En prenant $x=1$, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\exp(nx)=e^n$

Montrons que ce résultat est vrai dans $\mathbb{Q}$
Soit $n\in\mathbb{Z}$, $e=\exp(1)=\exp(n\frac{1}{n})=\left(\exp(\frac{1}{n})\right)^n$ $e>0$ donc $\exp(\frac{1}{n})=\sqrt[n]{e}=e^{\frac{1}{n}}$
Soit $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, $\exp(\frac{p}{q})=\left(\exp(\frac{1}{q})\right)^p=\left(\sqrt[q]{e}\right)^p=e^{\frac{p}{q}}$

Pour tout $\frac{p}{q}\in\mathbb{Z}$, $\exp(\frac{p}{q})=e^{\frac{p}{q}}$

On généralise à tout $\mathbb{R}$ et donc l'image de *x* par la fonction exponentielle sera notée e^x
On se sert de la notation exp pour désigner la fonction exponentielle.

Par exemple pour les formules de dérivation.
$(\exp)'=\exp$ donc $(\exp\circ u)'=u'\exp\circ u$
On peut écrire aussi : $\left(e^x\right)'=e^x$ donc $\left(e^u\right)'=u'e^u$
Mais on ne peut pas écrire les fonctions composées avec la notation e^x car e^x est un nombre, l'image de *x* par la fonction exponentielle, et non une fonction.

3 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

Les règles de calcul avec la fonction exponentielle sont les mêmes qu'avec les puissances comme le fait penser la notation e^x.

a_ Relation fondamentale.

Pour tout $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$, $e^{x+y}=e^x e^y$

b_ Propriétés qui en découlent.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$, $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$.

$$\text{Pour tout } (x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2,\ e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}.$$

3 Propriétés analytiques de la fonction exponentielle.

a_ Continuité et dérivabilité.

Par définition exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

$$\left(e^x\right)'=e^x$$

En appliquant la formule des fonctions composées si u est dérivable sur I alors $\exp\circ u=e^u$ est dérivable sur I.

$(g\circ f)'=f'g'\circ f$ ou encore $(g(f))'=f'g'(f)$ et $\exp'=\exp$ donnent :

$$(\exp\circ u)'=u'\exp\circ u \text{ ou encore } \left(e^u\right)'=u'e^u$$

b_ Variations.

Pour tout $x\in\mathbb{R},\left(e^x\right)'=e^x>0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)=e^x$		$+$	
$f(x)=e^x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c_ Limites au bornes de $]-\infty\,;+\infty[$.

Limite en $+\infty$.

Première méthode, l'exponentielle est croissante et non majorée.

exp est strictement croissante et $e^0=1$ donc $e^1=1+h$ avec $h>0$.

D'après les propriétés algébriques de exp : $e^n=(1+h)^n$

D'après la relation démontrée dans le devoir sur les suites adjacentes :

pour tout $a>-1$ et $n\in\mathbb{N},(1+a)^n>1+na$ donc $e^n>1+nh$

Soit $M>0$ montrons qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $e^x>M$.

Il suffit de trouver $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $1+n_0h>M$

$h>0$ donc $1+n_0h>M \Rightarrow n_0>\dfrac{M-1}{h}$

Soit $n_0\in\mathbb{N}$ vérifiant $n_0>\dfrac{M-1}{h}$ alors $e_0^n>1+n_0h>M$

Donc exp n'est pas majorée. exp est croissante donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

Deuxième méthode, pour tout $x>0$, $e^x>1+x$.
On étudie le signe de $f(x)=e^x-(1+x)$

$f'(x)=e^x-1$, $e^0=1$ et exp est strictement croissante donc pour tout $x>0$, $f'(x)>0$.
f est strictement croissante sur $[0;+\infty]$ et $f(0)=0$ donc pour tout $x>0$, $e^x>1+x$.
(Ici, il y a une petite subtilité, si *f* est strictement croissante sur $]a;+\infty[$ alors *f* est strictement croissante sur $[a;+\infty[$ Si vous ne comprenez pas pourquoi, posez la question à l'auteur.)
D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} 1+x=+\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

Limite en $-\infty$.
$e^{-y}=\dfrac{1}{e^y}$ en posant $y=-x$ il vient : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{y\to+\infty} e^{-y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{e^y}=0$

d_ exp admet une fonction réciproque.

exp est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. L'image de exp est l'intervalle $]0;+\infty[$ D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires tout $x\in]0;+\infty[$ admet un antécédent unique, y, dans $\mathbb{R}$.

Définition.
La fonction logarithme népérien, notée ln, est définie sur $]0;+\infty[$ par :
$\ln(x)$ est l'unique antécédent de x par la fonction exp.

Autrement dit :

pour tout $x>0$, $\ln(x)=y \Rightarrow x=e^y$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x=y \Rightarrow x=\ln(y)$

ou encore pour tout $x>0$, $e^{\ln(x)}=x$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\ln(e^x)=x$.

Propriété fondamentale de ln : pour tout $x>0$ et $y>0$, $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$

Démonstration.
En se servant des relations pour $a>0$, $e^{\ln(a)}=a$ et $e^t e^s=e^{t+s}$, on obtient :

$$x>0 \text{ et } y>0 ,\ e^{\ln(xy)}=xy=e^{\ln(x)}e^{\ln(y)}=e^{\ln(x)+\ln(y)}$$

Maintenant, ou d'après la croissance strict de exp $e^t=e^s \Rightarrow t=s$ donc $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$
ou j'applique $\ln(e^t)=t$ donc $\ln(e^{\ln(xy)})=\ln(e^{\ln(x)+\ln(y)})$ et $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$

Remarque importante. La fonction logarithme ne fais pas encore partie des connaissances exigibles. On étudiera dans un prochain chapitre cette fonction définie comme fonction ayant pour dérivée la fonction inverse. Mais cette présentation vous servira pour les autres matières.
On peut retenir que si $y>0$, $e^x=y \Rightarrow x=\ln(y)$ Cette formule sera donnée au prochain contrôle si l'on en a besoin.

III Solution de l'équation différentielle $\varphi'=k\varphi$ vérifiant $\varphi(0)=a$ pour $k\neq 0$ et $a\neq 0$.

1 $a\,e^{kx}$ est l'unique solution.

Condition nécessaire.

Soit φ une solution de l'équation. (On suppose qu'il existe une solution)
k n'est pas nul donc on peut définir la fonction *f* par $f(x)=\varphi(\frac{x}{k})$

$f'(x)=\frac{1}{k}\varphi'(\frac{x}{k})$, $\varphi'=k\varphi$ donc $f'(x)=\varphi(\frac{x}{k})=f(x)$ et $f(0)=\varphi(0)=a.$

a n'est pas nul donc on peut définir la fonction *g* par $g(x)=\frac{1}{a}f(x)$

$g'(x)=\frac{1}{a}f'(x)=\frac{1}{a}f(x)=g(x)$ et $g(0)=\frac{1}{a}f(0)=1.$

La fonction *g* est solution de l'équation différentielle $\varphi'=\varphi$ et $\varphi(0)=1.$ Cette équation a une unique solution la fonction exp définie sur $\mathbb{R}$ donc *g* doit être la fonction exp.
$g(x)=e^x \Rightarrow f(x)=a\,e^x \Rightarrow \varphi(x)=a\,e^{kx}.$

Condition suffisante.
Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=a\,e^{kx}$
$\varphi'(x)=a\,k\,e^{kx}=k\,\varphi(x)$ et $\varphi(0)=a$ donc $\varphi(x)=a\,e^{kx}$

$\varphi(x)=a\,e^{kx}$ est l'unique solution de l'équation différentielle $\varphi'=k\varphi$ vérifiant $\varphi(0)=a$ pour $k\neq 0$ et $a\neq 0$.

III Exemples sous forme d'exercices.

1 Une autre fonction exponentielle.

Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x\ln(2)}$ (ln(2), le logarithme népérien de 2, est un nombre irrationnel qui vaut environ 0,69. $e^{\ln(2)}=2$ et $e^{-\ln(2)}=\frac{1}{e^{\ln(2)}}=\frac{1}{2.}$

Variations.
$f'(x)$ est de la forme e^u avec $u(x)=-x\ln(2)$.
$(e^u)'=u'e^u$ donc $f'(x)=-\ln(2)e^{-x\ln(2)}=-\ln(2)f(x)$.
(Donc *f* est l'unique solution de $\varphi'=-\ln(2)\varphi$ vérifiant $\varphi(0)=1.$)

La fonction exponentielle est strictement positive, pour tout $x\in\mathbb{R}, e^{-xln(2)}>0$ donc $f'<0$ et la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

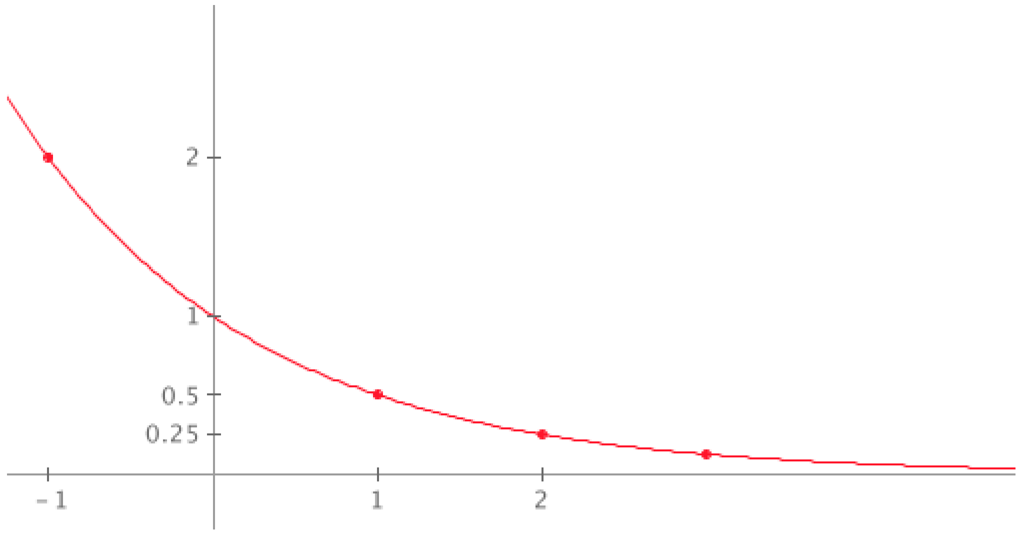
Limites.

$\lim_{x\to+\infty} -\ln(2)x=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-\ln(2)x}=0$.

L'axe des abscisses est une asymptote horizontale en $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} -\ln(2)x=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{-\ln(2)x}=+\infty$.

Représentation graphique de *f*.



Pour $n\in\mathbb{Z}$, $(f(n))$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Autre écriture de *f*.

$$f(x)=e^{-x\ln(2)}=\left(e^{-\ln(2)}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}$$

2 Calcul de la fonction dérivée d'une fonction réciproque.

Soit f^{-1} définie sur I, la fonction réciproque de *f* et Id la fonction identique définie par $Id(x)=x$. $f\circ f^{-1}=Id$ ou encore pour tout $x\in I, f(f^{-1}(x))=x$.

On suppose que f et f^{-1} sont dérivables et on sait que *Id* est dérivable. La formule de dérivation des fonctions composées étant $(h\circ g)'=g'\ h'\circ g$ ou encore $(h(g))'=g'\ h(g)$: pour tout $x\in I, \left(f(f^{-1}(x))\right)'=(x)'$ donc $\left(f^{-1}\right)'(x)f'(f^{-1}(x))=1$ si la fonction f' ne s'annule pas alors $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Application à la fonction ln, fonction réciproque de exp.

Pour tout $x>0$, $(\ln)'(x)=\frac{1}{e^{\ln(x)}}=\frac{1}{x}$

Dérivée pour $u>0$ de $\ln(u)$.

$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$

Comment un physicien résout, **méthode absolument déconseillée en mathématique**, car ces écritures ne sont valables que sous certaines conditions.

$f'=k\,f$ donc $\frac{f'}{f}=k$ et $\ln(f(x))=kx+c$ ou encore $f(x)=e^{kx+c}=e^{c}e^{kx}=a\,e^{kx}$

3 Un peu de calcul algébrique.

$e^{2}e^{-2}=e^{2-2}=1$ ou $e^{2}e^{-2}=\frac{e^{2}}{e^{2}}=1$

Résolution d'équations.

$e^{x}=3 \Rightarrow \ln(e^{x})=\ln(3) \Rightarrow x=\ln(3)$ Vérification. S = {ln(3)}

$e^{x}e^{x+1}=5 \Rightarrow e^{x+x+1}=5 \Rightarrow \ln(e^{2x+1})=\ln(5) \Rightarrow 2x+1=\ln(5) \Rightarrow x=\frac{\ln(5)-1}{2}$

Vérification. S = $\left\{\frac{\ln(5)-1}{2}\right\}$

$e^{x}=-1$ une exponentielle est strictement positive $S=\emptyset$

$e^{x^2}=e^{4} \Rightarrow x^{2}=4 \Rightarrow x=-2 \; ou \; x=2$ Vérification S = { -2 ; 2 }.

$e^{2x}+5e^{x}-6=0 \Rightarrow (e^{x})^{2}+5e^{x}-6=0$ En posant $y=e^{x}$ on obtient une équation du second degré.

$\Delta=b^{2}-4ac=25+24=7^{2}$

$y_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-6$ et $y_2=1$ Vérification : $S=-6+1=\frac{-b}{a}$ et $P=-6\times 1=\frac{c}{a}$

$y=e^{x}$ donc $e^{x}=-6$ impossible ou $e^{x}=1$ et $x=0$ Vérification S = { 0 }.