Evènements indépendants.

I Définitions.

La notion d'indépendance en mathématique est la même qu'en français. A et B sont indépendants si la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A.

On suppose que la suite que $p(A)$ et $p(B)$ ne sont pas nuls.

Définition 1.
A et B sont indépendants signifie : $p_B(A)=p(A)$

Définition 2
A et B sont indépendants signifie : $p(A\cap B)=p(A)\,p(B)$

Les définitions 1 et 2 sont équivalentes.

Démonstration :
1 implique 2
$$p_B(A)=p(A) \Rightarrow \frac{p(A\cap B)}{p(B)}=p(A) \Rightarrow p(A\cap B)=p(B)\,p(A)$$
2 implique 1
$$p(A\cap B)=p(B)\,p(A) \Rightarrow \frac{p(A\cap B)}{p(B)}=p(A) \Rightarrow p_B(A)=p(A)$$

II Propriétés.

Théorème : si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration :
Les évènements $A\cap B$ et $A\cap\overline{B}$ sont incompatibles (un élément de A ne peut appartenir en même temps à B et $\overline{B}$)
$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) \Rightarrow p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B}) \Rightarrow p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)$$
$p(A\cap B)=p(B)\,p(A)$ donc :
$$p_{\overline{B}}(A)=\frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}=\frac{p(A)-p(A\cap B)}{1-p(B)}=\frac{p(A)-p(A)\,p(B)}{1-p(B)}=\frac{p(A)(1-p(B))}{1-p(B)}=p(A)$$

On démontre de même les autres cas.

III Exemples.

1 $p(A)=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{1}{3}$ et $p(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$p(A)\,p(B)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\neq p(A\cap B)=\frac{1}{5}$ donc A et B ne sont pas indépendants.

2 $p(A)=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{1}{3}$ et $p(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$p(A)\,p(B)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=p(A\cap B)$ donc A et B sont indépendants.