1 Inégalités - Etude de signe

1-1 Opérations sur les inégalités

Règles usuelles :

Pour tout a :	$x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$	*même sens*
Pour tout $k > 0$:	$x < y \Rightarrow kx < ky$	*même sens*
Pour tout $k < 0$:	$x < y \Rightarrow kx > ky$	*sens contraire*
Pour x et y de même signe :	$x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$	*sens contraire*
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow x^2 < y^2$	*même sens*
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$	*même sens*
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow \ln x < \ln y$	*même sens*
Pour tous x et y :	$x < y \Rightarrow e^x < e^y$	*même sens*
Si f croissante * :	$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$	*même sens*
Si f décroissante * :	$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$	*sens contraire*

(* sur un intervalle contenant x et y)

► *Exemples :*

• Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{1}{3-x}$?

$3 < x < 5 \Rightarrow -3 > -x > -5$ *(sens contraire)* $\Rightarrow 0 > 3 - x > -2 \Rightarrow \dfrac{1}{3-x} < -\dfrac{1}{2}$ *(sens contraire)*

• Comment montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$?

Pour tout $x > 1$:

$0 < x^2 - 1 < x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2-1} < x$ (car $x > 0$) $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{1}{x}$ *(sens contraire)*

Rappels :

• On peut toujours **ajouter** membre à membre deux inégalités.
• On peut **multiplier** membre à membre deux inégalités si tous les termes sont **positifs**.
• **On ne peut pas soustraire ou diviser membre à membre deux inégalités.**

Encadrement de $x - y$:

• On détermine d'abord un encadrement de $-y$, puis on effectue la somme membre à membre avec celui de x.

► *Exemple :* $\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4 < y < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 3 \\ 1 < -y < 4 \text{ (sens contraire)} \end{cases} \Rightarrow -1 < x - y < 7.$

Encadrement de $\dfrac{x}{y}$: (les bornes de l'encadrement de x étant de même signe - idem pour y)

• On détermine d'abord un encadrement de $\dfrac{1}{y}$, puis il faut s'arranger pour multiplier membre à membre deux encadrements dont tous les termes sont **positifs**.

► *Exemple 1 :* $\begin{cases} 8 < x < 9 \\ 3 < y < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 < x < 9 \\ \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{3} \text{ (sens contraire)} \end{cases}$

$\Rightarrow 2 < \dfrac{x}{y} < 3.$

► *Exemple 2:* $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ 2 < y < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < -x < 2 \text{ (sens contraire)} \\ \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{2} \text{ (sens contraire)} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{-x}{y} < 1 \Rightarrow -1 < \dfrac{x}{y} < -\dfrac{1}{3}$ *(sens contraire).*

Méthode importante à connaître : (valable pour les fonctions et les suites)

• Pour montrer que $A < B$, il est dans certains cas plus facile de calculer $A - B$, puis en étudiant son signe de montrer que $A - B < 0$.

► *Exemple 1:* Comment montrer que si $x < 1$ alors $\dfrac{x-8}{2x-9} < 1$?

Pour tout $x < 1$, $\dfrac{x-8}{2x-9} - 1 = \dfrac{\overbrace{(1-x)}^{+}}{\underbrace{(2x-9)}_{-}} < 0$. Car, $x < 1 \Rightarrow \begin{cases} -x > -1 \\ 2x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ 2x-9 < -7 < 0 \end{cases}$

► *Exemple 2:* Comment montrer que si $0 < U_n < 3$ alors $\dfrac{8U_n+3}{U_n+6} < 3$?

$\dfrac{8U_n+3}{U_n+6} - 3 = \dfrac{\overbrace{5U_n-15}^{-}}{\underbrace{U_n+6}_{+}} < 0$. Car, $0 < U_n < 3 \Rightarrow \begin{cases} 5U_n < 15 \\ 6 < U_n+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5U_n - 15 < 0 \\ 0 < U_n+6 \end{cases}$

1-2 Signe de $ax + b \quad (a \neq 0)$

On détermine la valeur de x qui annule $ax + b$, puis on applique la règle : "signe de a après le 0".

x	−∞	−b/a	+∞
ax+b	signe de (−a)	0	signe de a

1-3 Signe de $ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)

• Si $\Delta < 0$, on applique la règle : "toujours du signe de a".

x	−∞	+∞
ax²+bx+c	Signe de a	

• Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.

On applique alors la règle : "toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$".

x	−∞	x1	+∞
ax²+bx+c	Signe de a	0	Signe de a

• Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On applique alors la règle : "signe de a à l'extérieur des racines".

x	−∞	x1		x2	+∞
ax²+bx+c	Signe de a	0	Signe de (-a)	0	Signe de a

(on suppose que $x_1 < x_2$)

1-4 Autres signes

(on ne s'intéresse pas ici aux cas où on utilise les variations d'une fonction auxiliaire)

Inégalités à connaître :
• Pour tout x, $x^2 \geqslant 0$, $e^x > 0$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
• $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$
• $\ln x > 0$ pour $x > 1$.

► *Exemples d'application :*
Pour tout x, $2 + \cos x > 0$, $\sin x - 1 \leqslant 0$, $-\dfrac{e^x}{x^2+1} < 0$.

Dans les autres cas (après avoir factorisé au maximum) :
Pour étudier le signe d'une expression $A(x)$ sur un intervalle I (dans le cas où A représente une fonction continue sur I), on résoud l'inéquation $A(x) \geqslant 0$ *(on cherche ce qui annule l'expression et où mettre le(s) signe(s) +).*
► *Exemple 1 :* Etude du signe de $(3 - \ln x)$ sur $I =]0; +\infty[$.
$3 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 3 \geqslant \ln x \Leftrightarrow e^3 \geqslant x$.
On en conclut que l'expression s'annule pour $x = e^3$ et qu'il faut mettre le signe + pour $0 < x < e^3$:

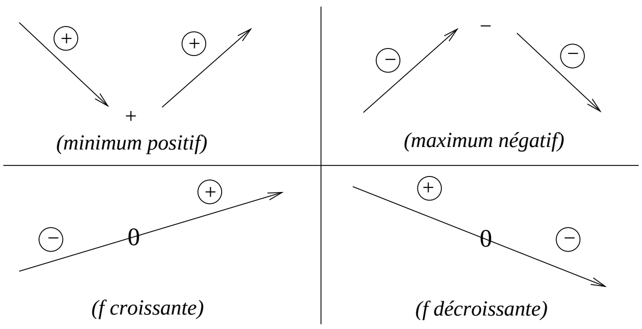
x	0		e^3		$+\infty$
$3 - \ln x$	‖	+	0	−	

► *Exemple 2 :* Etude du signe de $(e^{1/x} - 2)$ sur $I =]0; +\infty[$.
$e^{1/x} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{1/x} \geqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{\ln 2}$.
On en conclut que l'expression s'annule pour $x = \dfrac{1}{\ln 2}$ et qu'il faut mettre le signe + pour $0 < x < \dfrac{1}{\ln 2}$:

x	0		$1/\ln 2$		$+\infty$
$e^{1/x} - 2$	‖	+	0	−	

1-5 Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



2 Suites

2-1 Etude du sens de variation

Méthode 1 *(la plus fiable - convient dans tous les cas)*
• Si pour tout $n \geqslant n_0$, $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ alors la suite est croissante à partir de n_0.
• Si pour tout $n \geqslant n_0$, $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ alors la suite est décroissante à partir de n_0.

Méthode 2 : pour les suites dont tous les termes sont **strictement positifs**
• Si pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$ alors la suite est croissante à partir de n_0.
• Si pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant 1$ alors la suite est décroissante à partir de n_0.

Méthode 3 : pour les suites définies de façon explicite par $U_n = f(n)$.
• Si f est croissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite est croissante.
• Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite est décroissante.

2-2 Suites arithmétiques

On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre a appelé raison de la suite.
• Pour tout n: $U_{n+1} = U_n + a$; $U_n = U_0 + na$; $U_n = U_p + (n-p)a$
• Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n =$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.
• $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = (n-p+1) \times \dfrac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$
• Si la raison a est positive, la suite est croissante.
• Si la raison a est négative, la suite est décroissante.
• Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique se situent sur une même droite.

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $a = 3$.
$U_{10} = U_0 + 10a = 2 + 10 \times 3 = 32$; $U_{33} = U_0 + 33a = 2 + 33 \times 3 = 101$
Pour tout n, $U_n = U_0 + na = 2 + 3n$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 11 \times \dfrac{2+32}{2} = 187$. ***(attention : le nb de termes est égal à 11 pas à 10 !)***
La suite est strictement croissante car $a > 0$.

2-3 Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre b appelé raison de la suite.
• Pour tout n: $U_{n+1} = b \cdot U_n$; $U_n = b^n \cdot U_0$; $U_n = b^{n-p} \cdot U_p$
• Si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
• $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \dfrac{1 - b^{n-p+1}}{1-b} = \text{1er terme} \times \dfrac{1 - b^{\text{nb de termes}}}{1-b}$ (pour $b \neq 1$)
• Pour étudier le sens de variation, on calcule $U_{n+1} - U_n$ et on factorise.
(remarque : si $b < 0$ la suite est ni croissante, ni décroissante - il est donc inutile de faire le calcul)

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.
$U_4 = b^4 \cdot U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = b^{10} \cdot U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = b^n \cdot U_0 = 5 \cdot 2^n$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1 - 2^9}{1-2} = 2555$. ***(attention : le nb de termes est égal à 9 pas à 8 !)***
$U_{n+1} - U_n = 5 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 2^n = 5 \cdot 2^n \cdot (2-1) = 5 \cdot 2^n > 0$. La suite est croissante.

2-4 Raisonnement par récurrence

Principe général :
Pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$:
• on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0.
• on suppose la propriété vraie au rang p *(en traduisant ce que cela signifie)* et on montre qu'alors la propriété est vraie au rang $p+1$.
• on conclut en disant que la propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

► *Exemple :*
Montrons par récurrence que la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$ est positive et majorée par 2 :
• $0 \leqslant U_0 \leqslant 2$. La propriété est vraie au rang 0.
• On suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $0 \leqslant U_p \leqslant 2$.
On a alors : $2 \leqslant 2 + U_p \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2 + U_p} \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant U_{p+1} \leqslant 2$.
La propriété est alors vraie au rang $p+1$.
• Elle est donc vraie pour tout n.

2-5 Limites de suite

• Une suite (U_n) est dite **convergente** s'il existe un **réel** l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.
• La suite est dite **divergente** si elle n'admet pas de limite ou si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$
• Les théorèmes sur les opérations avec les limites de fonction restent valables pour les suites.

Pour les suites définies par $U_n = f(n)$: si f admet une limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
(dans la pratique, on peut continuer à utiliser n comme variable)

▶ *Exemple :*
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0$
car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$.

Limite de b^n :
• si $-1 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$.
• si $b > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = +\infty$.
• si $b < -1$ alors la suite de terme général b^n n'admet pas de limite.

▶ *Exemples :*
• $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
• $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

Théorémes de comparaison :
• si pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n \geqslant V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
• si pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n \leqslant W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.
• si pour tout $n \geqslant n_0$, $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$ (l réel) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

▶ *Exemple :*
Pour tout $n \geqslant 1$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

Convergence des suites monotones :
• toutes suite croissante et majorée est convergente.
• toutes suite décroissante et minorée est convergente.

Suites adjacentes :
• Deux suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0$.
• Deux suites adjacentes sont convergentes et elles admettent la même limite.

▶ *Exemple :*
Soit (U_n) et (V_n) les suites définies par $U_n = 1-\dfrac{1}{n}$ et $V_n = 1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} - 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$. (U_n) est croissante.
Pour tout n, $V_{n+1} - V_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$. (V_n) est décroissante. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = -\dfrac{1}{n} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{3} < 1$). Les suites sont adjacentes.

2-6 Suites récurrentes : $U_{n+1} = f\left(U_n\right)$

Si une suite (U_n) définie par $U_{n+1} = f\left(U_n\right)$ admet une limite réelle l et si la fonction f est continue sur un intervalle contenant l alors on a $l = f(l)$.
(l est une solution de l'équation $x = f(x)$)

► *Exemple :*

Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{4} + 3$.

a) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite :

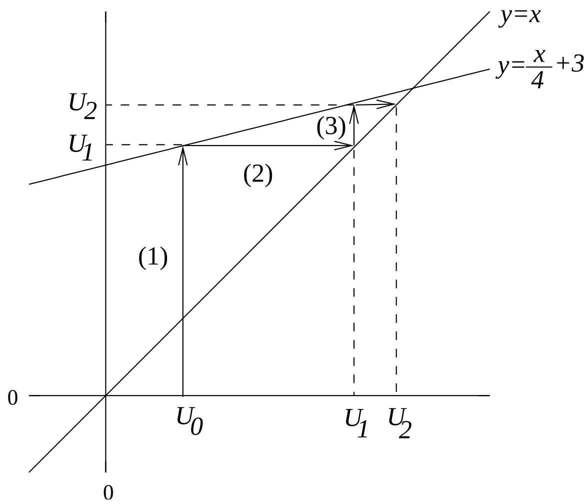
On trace d'abord la représentation graphique de la fonction f définissant la relation de récurrence (ici on a $f(x) = \dfrac{x}{4} + 3$) et la droite d'équation $y = x$.

On part de U_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne U_1 [(1) *sur le graphique*] .

Pour déterminer $U_2 = f(U_1)$, il nous faut rabattre U_1 sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation $y = x$.

Dès lors, U_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse U_1 [(3) *sur le graphique*].

Pour poursuivre la construction, on répéte le procédé en rabattant U_2 sur l'axe des abscisses...



b) Montrer par récurrence que la suite est majorée par 4 :

au rang 0 : $U_0 = 1 \leqslant 4$.

on suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $U_p \leqslant 4$. Alors $\dfrac{U_p}{4} \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{U_p}{4} + 3 \leqslant 4 \Rightarrow U_{p+1} \leqslant 4$.

La propriété est alors vraie au rang $p + 1$. Elle est donc vraie pour tout n.

c) Montrer que la suite est croissante et conclure sur sa convergence :

Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n}{4} + 3 - U_n = \dfrac{3}{4}(4 - U_n) \geqslant 0$ car $U_n \leqslant 4$. La suite est donc croissante et comme elle est majorée, elle converge.

d) Déterminer la limite de la suite :

La suite converge vers un réel l et la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{4} + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l est une solution de l'équation $x = f(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{x}{4} + 3 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x = 3 \Leftrightarrow x = 4$.

L'équation admettant 4 comme unique solution, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 4$.

3 Etude de fonction

3-1 Parité - Périodicité

• f est paire si D_f est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. La courbe dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

• f est impaire si D_f est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$. La courbe dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine.

• une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T si $f(x + T) = f(x)$ pour tout x. La courbe dans un repère orthogonal est invariante par la translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$.

3-2 Axe et centre de symétrie

• C_f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie dans un repère orthogonal si pour tout h tel que $a \pm h \in D_f$, $f(a+h) = f(a-h)$.

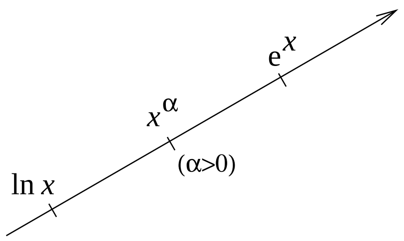
• C_f admet le point $\Omega\,(a,b)$ comme centre de symétrie dans un repère orthogonal si pour tout h tel que $a \pm h \in D_f$, $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.

3-3 Limites

Les quatres cas de forme indéterminée sont : $\overbrace{(\quad)}^{+\infty}+\overbrace{(\quad)}^{-\infty}$; $\overbrace{(\quad)}^{\pm\infty}\times\overbrace{(\quad)}^{0}$; $\dfrac{\overbrace{(\quad)}^{\pm\infty}}{\underbrace{(\quad)}_{\pm\infty}}$; $\dfrac{\overbrace{(\quad)}^{0}}{\underbrace{(\quad)}_{0}}$

Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:
on met la plus grande puisssance de x en facteur en haut et en bas, puis on simplifie.

Situation en $+\infty$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$



• Exemples :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ (le plus fort est en bas)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ (le plus fort est en haut)

Méthode générale : Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.

► *Exemple :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\ln x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{\ln x}{e^x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty \quad \text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x} = 0$$

Situation en $-\infty$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha \cdot e^x = 0 \quad (\alpha > 0)$

Méthode générale : on essaie de faire apparaître ces limites.
Si cela ne suffit pas, on peut essayer le changement de variable $X = -x$

Situation en 0 :
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha \cdot \ln x = 0 \quad (\alpha > 0)$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

Méthode générale : on essaie de faire apparaître ces limites.
Si cela ne suffit pas, on peut essayer le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$

• Dans le cas d'une forme indéterminée du type $\dfrac{\overbrace{(\ )}^{0}}{\underbrace{(\ )}_{0}}$, on peut essayer d'utiliser la propriété suivante :

Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.
• Pour les expressions avec racine carrée, on peut essayer de multiplier en haut et en bas par l'expression conjuguée pour lever la forme indéterminée.

3-4 Asymptotes

• Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite verticale d'équation $x = a$ est asymptote à C_f.
• Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite horizontale d'équation $y = b$ est asymptote à C_f.
• Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f.
• De façon générale, si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$ alors les courbes C_f et C_g sont asymptotes.

• Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales et obliques) :
- si $f(x) - g(x) \geqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située au dessus de C_g sur I.
- si $f(x) - g(x) \leqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située en dessous de C_g sur I.

3-5 Dérivabilité - Tangente

• f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est égale à un réel.
• si la limite n'existe que pour $x > a$, f n'est dérivable qu'à droite.
• si la limite n'existe que pour $x < a$, f n'est dérivable qu'à gauche.

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est :
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$
• Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente est parallèle à une certaine droite d'équation $y = mx+p$, il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$. (les coefficients directeurs devant être égaux)

3-6 Continuité - Equation $f(x) = k$

• f est continue en un point a d'un intervalle $I \subset D_f$ si f admet une limite en a et si $\lim\limits_{x \to a} = f(a)$.
• Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

• Si f est **continue** et **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur un intervalle I et si $k \in f(I)$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans I.
• Pour déterminer une valeur approchée de x_0, on utilise la méthode du "balayage".

► *Exemple :* la fonction f définie par $f(x) = x + e^x$ est continue et strictement croissante sur $I = [0{,}1]$ car f est dérivable et $f'(x) = 1 + e^x > 0$ sur I. De plus 2 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$. On peut donc en conclure que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution x_0 dans $[0{,}1]$.
Pour déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près, on balaye l'intervalle avec un pas de $0{,}1$:

x	0	0,1	0,2	0,3	**0,4**	**0,5**	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$	1	1,2	1,4	1,6	**1,9**	**2,1**					

On a arrêté les calculs après $0{,}5$ car 2 a été "franchi" par $f(x)$.
En effet, d'après le tableau, $f(0{,}4) < 2 < f(0{,}5)$. On peut donc en déduire que : $0{,}4 < x_0 < 0{,}5$.
Conclusion :
$0{,}4$ est une valeur approchée de x_0 **par défaut** à 10^{-1} près.
$0{,}5$ est une valeur approchée de x_0 **par excés** à 10^{-1} près.

4 Logarithme et Exponentielle

• $\ln x$ n'existe que si $x > 0$

• Si $a > 0$ et $b > 0$:
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln a$; $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

• $\ln e = 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$; $\ln x > 0$ si $x > 1$

• $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$

• $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$

• $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$; $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

• Pour tout x, $e^x > 0$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$

• Pour tous réels a et b : $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$; $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$; $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $(e^a)^\alpha = e^{a\alpha}$

• $(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = u'e^u$

• $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$

• Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

▶ *Exemples d'équations et d'inéquations:*

• $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x > 0$.
Avec cette condition :
$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^5}{2}$. $S = \left\{\dfrac{e^5}{2}\right\}$

• $\ln(x+2) \leqslant 1$. Condition d'existence : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
Avec cette condition :
$\ln(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow x + 2 \leqslant e \Leftrightarrow x \leqslant e - 2$. $S =]-2; e-2]$

• $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = e^x$.
$\Delta = 16$; $X = -1$ ou $X = 3$.
D'où, $e^x = -1$ (impossible) ou $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$

• $e^x < 5e^{-x} \Leftrightarrow e^x < \dfrac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 5$ (car $e^x > 0$) $\Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 5}{2}$. $S = \left]-\infty; \dfrac{\ln 5}{2}\right[$.

5 Primitives

• F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
• Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
• Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

▶ *Exemple :*
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc des primitives.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = x^2$ (car pour tout x, $F'(x) = f(x)$).
Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par $F(x) = x^2 + C$.
La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $x = 1$ est la fonction F définie par $F(x) = x^2 - 1$.

Primitives des fonctions usuelles

f définie par	primitives sur I	I
$f(x)=a$	$F(x)=ax+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $(n\in\mathbb{N};n>1)$	$F(x)=\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+C$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+C$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$F(x)=\tan x+C$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;+\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln x+C$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R};\alpha\neq-1)$	$F(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$]0;+\infty[$

Primitives : formules générales

forme de f	primitives de f	exemples
$f(x)=\alpha U'(x)+\beta V'(x)$	$F(x)=\alpha U(x)+\beta V(x)+C$	$f(x)=3x^2+2x+1$ $F(x)=x^3+x^2+x+C$
$f(x)=U'(x)\cdot[U(x)]^n$ $(n\in\mathbb{N})$	$F(x)=\dfrac{[U(x)]^{n+1}}{n+1}+C$	$f(x)=4(4x+1)^2$ $F(x)=\dfrac{(4x+1)^3}{3}+C$
$f(x)=\dfrac{U'(x)}{[U(x)]^n}$ $(n\in\mathbb{N};n>1;U(x)\neq0)$	$F(x)=\dfrac{-1}{(n-1)\,[U(x)]^{n-1}}+C$	$f(x)=\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ $F(x)=\dfrac{-1}{x^3+1}+C$
$f(x)=\dfrac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$ $(U(x)>0)$	$F(x)=2\sqrt{U(x)}+C$	$f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$ $F(x)=2\sqrt{3x+2}+C$
$f(x)=U'(x)\cdot\cos[U(x)]$	$F(x)=\sin[U(x)]+C$	$f(x)=4x\cos(2x^2+1)$ $F(x)=\sin(2x^2+1)+C$
$f(x)=U'(x)\cdot\sin[U(x)]$	$F(x)=-\cos[U(x)]+C$	$f(x)=5\sin(5x)$ $F(x)=-\cos(5x)+C$
$f(x)=\dfrac{U'(x)}{U(x)}$ $(U(x)\neq0)$	$F(x)=\ln[U(x)]+C$ $(\text{si } U(x)>0)$ $F(x)=\ln[-U(x)]+C$ $(\text{si } U(x)<0)$	$f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ $F(x)=\ln(x^2+1)+C$
$f(x)=U'(x)\cdot e^{U(x)}$	$F(x)=e^{U(x)}+C$	$f(x)=-2xe^{-x^2}$ $F(x)=e^{-x^2}+C$
$f(x)=U'(x)\cdot[U(x)]^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R};\alpha\neq-1;U(x)>0)$	$F(x)=\dfrac{[U(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$f(x)=2x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ $F(x)=\dfrac{2}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}+C$

• **Recherche pratique d'une primitive :**

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la «forme» qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemples :*
1) Soit f définie par $f(x)=\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)$. f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc des primitives.
On cherche à utiliser la «forme» $u'\cos u$ (dont une primitive est $\sin u$).
La «forme exacte» serait $\underbrace{4}_{u'}\underbrace{\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)}_{\cos u}$. On écrit donc que $f(x)=\underbrace{\dfrac{1}{4}}_{\text{coefficient}}\times\underbrace{4\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)}_{\text{forme exacte}}$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc F définie par $F(x)=\underbrace{\dfrac{1}{4}}_{\text{coefficient}}\times\underbrace{\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)}_{\sin u}$.
2) Exemple «classique» : primitive sur $]0;+\infty[$ de f définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.
Il suffit d'écrire que $f(x)=\dfrac{1}{x}\times\ln x$. On a alors la forme exacte $u'u$ (dont une primitive est $\dfrac{u^2}{2}$).
Une primtive de f sur $]0;+\infty[$ est donc F définie par $F(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{2}$.

• Détermination d'une primitive dont on connaît la forme :
► *Exemple :*
Soit f définie par $f(x)=(4x+1)e^x$. On demande de chercher une primitive de f sur $\mathbb{R}$ sous la forme d'une fonction F définie par $F(x)=(ax+b)e^x$.
Il suffit de dire que l'on doit avoir, pour tout x, $F'(x)=f(x)$.
Ce qui donne : $ae^x+(ax+b)e^x=(4x+1)e^x$ (pour tout x)
$\Leftrightarrow ax+(a+b)=4x+1$ (pour tout x)
D'où, on doit avoir $a=4$ et $a+b=1$ (par identification des deux polynômes).
On obtient $a=4$ et $b=-3$. Une primitive est donc F définie par $F(x)=(4x-3)e^x$.

6 Intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :
• Pour tous a et b de I, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur I.
• Pour tout a de I, la fonction F définie par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule pour $x=a$.

► *Exemple :* $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\frac{1}{2}$.

Propriétés de l'intégrale :
Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :
• $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$.
• $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$ *(Relation de Chasles)*
• $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
• Pour tout réel k, $\displaystyle\int_a^b (kf)(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
• Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$
• Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\leqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0$
• Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\leqslant g(x)$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$
• Si $a\leqslant b$ et si $m\leqslant f(x)\leqslant M$ sur $[a,b]$ alors $m(b-a)\leqslant\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a)$ (inégalité de la moyenne)

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Si f est continue sur $[a,b]$, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Intégration par parties

Pour u et v dérivables sur un intervalle I contenant a et b telles que leurs dérivées soient continues sur I :

$$\int_a^b u(x)\,v\,'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u\,'(x)\,v(x)\,dx$$

En général, le but de la manoeuvre est de se débarrasser du terme qui gêne pour la recherche d'une primitive. Si $f(x)$ est de la forme $(\text{polynôme})e^x$ ou $(\text{polynôme})\sin x$ ou $(\text{polynôme})\cos x$, il est conseillé de prendre $u(x) = \text{polynôme}$.

► *Exemples :*

1) $\displaystyle\int_0^\pi \underbrace{2x}_{u}\,\underbrace{\cos x}_{v'}\,dx = [\,\underbrace{2x}_{u}\,\underbrace{\sin x}_{v}\,]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{2}_{u'}\,\underbrace{\sin x}_{v}\,dx = 0 - [-2\cos x]_0^\pi = -4$

2) Un cas classique :

$\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e \underbrace{\ln x}_{u} \times \underbrace{1}_{v'}\,dx = [\,\underbrace{\ln x}_{u} \times \underbrace{x}_{v}\,]_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \times \underbrace{x}_{v}\,dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$

Calculs d'aires

f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.

• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

(«intégrale de la plus grande moins la plus petite»)

• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

► *Remarques :*

• Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses et par la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées.

• Pour déterminer l'aire entre une courbe et l'axe des abscisses, il faut d'abord étudier le signe de la fonction sur l'intervalle en question.

• Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord étudier leur position relative sur l'intervalle en question.

7 Equations différentielles

• Dire que f est une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y\,' = a\,y$ ($a \neq 0$) signifie que, pour tout x de I, $f\,'(x) = a\,f(x)$.

• Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y\,' = a\,y$ ($a \neq 0$) sont les fonctions définies par $f(x) = C\,e^{ax}$ où C est un réel quelconque.

► *Exemple :*

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y\,' = -3\,y$ sont les fonctions définies par $f(x) = C\,e^{-3x}$.

• Dire que f est une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y\,' = a\,y + b$ ($a \neq 0$) signifie que, pour tout x de I, $f\,'(x) = a\,f(x) + b$.

• Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y\,' = a\,y + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions définies par $f(x) = C\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où C est un réel quelconque.

► *Exemple :*
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y\,' = 2\,y + 3$ sont les fonctions définies par $f(x) = C\,e^{2x} - \dfrac{3}{2}$.

• Exemples classiques d'équations différentielles se ramenant aux formes précédentes

► *Exemple 1 :*
a) Montrer que g définie par $g(x) = 2x + \dfrac{1}{2}$ est une solution de l'équation différentielle $(E) :\ y\,' + 2y = 4x + 3$.
Pour tout x, $g\,'(x) + 2g(x) = 2 + 4x + 1 = 4x + 3$. g est bien une solution de (E).
b) Montrer que dire que f est une solution de (E) équivaut à dire que $(f - g)$ est une solution de l'équation différentielle $(E\,') :\ y\,' + 2y = 0$.
f solution de $(E) \Leftrightarrow f\,'(x) + 2f(x) = 4x + 3$ (pour tout x)
$\Leftrightarrow f\,'(x) + 2f(x) = g\,'(x) + 2g(x)$ (pour tout x) car g est une solution de (E)
$\Leftrightarrow (f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0$ (pour tout x)
$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de $(E\,')$.
c) Résoudre $(E\,')$ et en déduire les solutions de (E).
Les solutions de $(E\,')$ sont définies par $f_0(x) = Ce^{-2x}$. f solution de $(E) \Leftrightarrow (f - g)(x) = f_0(x)$ (pour tout x).
Donc, les solutions de (E) sont définies par $f(x) = f_0(x) + g(x) = Ce^{-2x} + 2x + \dfrac{1}{2}$.

► *Exemple 2 :*
a) Montrer que dire que f est une solution de $(E) :\ y\,' + 2y = y^2$ à valeurs strictement positives équivaut à dire que $\dfrac{1}{f}$ est une solution de $(E\,') :\ y\,' = 2y - 1$.
Comme f est dérivable à valeurs strictement positives, $\dfrac{1}{f}$ est aussi dérivable.
$\dfrac{1}{f}$ solution de $(E\,') \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{f}\right)' = 2\left(\dfrac{1}{f}\right) - 1 \Leftrightarrow -\dfrac{f\,'}{f^2} = \dfrac{2}{f} - 1$
$\Leftrightarrow -f\,' = 2f - f^2 \Leftrightarrow f\,' + 2f = f^2 \Leftrightarrow f$ solution de (E).
b) Résoudre $(E\,')$ et en déduire les solutions de (E).
Les solutions de $(E\,')$ sont définies par $f_0(x) = Ce^{2x} + \dfrac{1}{2}$.
Donc, les solutions de (E) sont définies par $f(x) = \dfrac{1}{f_0(x)} = \dfrac{1}{Ce^{2x} + \frac{1}{2}}$.

8 Complexes

8-1 Forme algébrique - Calculs dans $\mathbb{C}$

• Tout complexe s'écrit de façon unique sous la forme algébrique $z = a + ib$ (a et b réels) avec $i^2 = -1$.
• a est la partie réelle (notation : $Re(z)$) et b est la partie imaginaire (notation : $Im(z)$).
• $\begin{cases} a + ib = a' + ib' \\ a, b\,, a'\,, b' \text{ réels} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
• Le conjugué de z est $\overline{z} = a - ib$.
• Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur (s'il n'est pas réel).
• $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

► *Exemples :*
• $\dfrac{2 + i}{3 + 2i} = \dfrac{(2 + i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \dfrac{6 - 4i + 3i - 2i^2}{3^2 + 2^2} = \dfrac{8 - i}{13}$
• Résolution de l'équation $\dfrac{1 + iz}{z} = -1 + 3i$:
Pour $z \neq 0$, on obtient : $1 + iz = (-1 + 3i)z \Leftrightarrow 1 = (-1 + 2i)z \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{-1 + 2i} = \dfrac{-1 - 2i}{1^2 + 2^2} = \dfrac{-1 - 2i}{5}$.
• Résolution de l'équation $(1 + i)z = \overline{z} - 2 + 3i$:
En posant $z = x + iy$ (x et y réels), on a :

$(1+i)(x+iy) = x - iy - 2 + 3i \Leftrightarrow (x-y) + i(x+y) = (x-2) + i(-y+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = x-2 \\ x+y = -y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

D'où, $z = -1 + 2i$.

Résolution de $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c réels) : $\Delta = b^2 - 4ac$ • Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. • Si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $z_1 = -\dfrac{b}{2a}$. • Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

► *Exemple :* $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$. Deux solutions : $z_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

► *Remarque :* On factorise les polynômes dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$.

8-2 Forme trigonométrique - Module et arguments

Pour $z = a + ib$ (a et b réels) : • Le module de z est : $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$. • Si $z \neq 0$, tout réel θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\lvert z\rvert} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\lvert z\rvert} \end{cases}$ est un argument de z. On note $arg\ z = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

• Pour tout θ, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. $\lvert e^{i\theta}\rvert = 1$; $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$; $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$; $e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ • Si un complexe non nul admet r comme module et θ comme argument alors $z = r\cdot e^{i\theta}$ (forme trigonométrique ou forme exponentielle) • Si $z = r\cdot e^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $\lvert z\rvert = r$ et $arg\ z = \theta + 2k\pi$. • $r\cdot e^{i\theta} = r'\cdot e^{i\theta'}$ (avec $r > 0$ et $r' > 0$) $\Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$.

► *Exemple de passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :*

Soit $z = \sqrt{3} + i$. $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$. D'où $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

► *Exemple de passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :*

$z = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.

► *Autres exemples classiques d'utilisation de la forme trigonométrique :*

• Calcul de $(1-i)^{12}$. Il est hors de question de faire le calcul sous forme algébrique.

On détermine d'abord la forme trigonométrique de $z = 1 - i$:

$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{4}$. D'où $z = \sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $(1-i)^{12} = z^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\cdot e^{-i\frac{12\pi}{4}} = 64\cdot e^{-i3\pi} = 64\left(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)\right) = -64$

• Soit $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

Calculer la forme trigonométrique de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Réponse : En calculant le module et un argument de z_1 et z_2, on montre que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

On en déduit que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Ainsi $\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$. Or, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{4} = \dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$.

Donc, $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

• Résolution de l'équation $z^3 = 1$:

En posant $z = r \cdot e^{i\theta}$, on doit avoir $r^3 \cdot e^{i3\theta} = 1 \cdot e^{i0} \Leftrightarrow r^3 = 1$ et $3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow r = 1$ et $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$.

Les trois solutions sont donc :

$1 \cdot e^{i0} = 1$; $1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (en prenant $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$).

• Formule de Moivre :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

En développant le premier membre et en identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

• Formules d'Euler :

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

► *Exemple* : linéarisation de $\cos^3 x$

$\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{e^{i3x}+e^{-i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}}{8} = \dfrac{2\cos(3x)+6\cos(x)}{8} = \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$

8-3 Complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

• L'affixe du point $M(x,y)$ est $z_M = x + iy$.

• L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

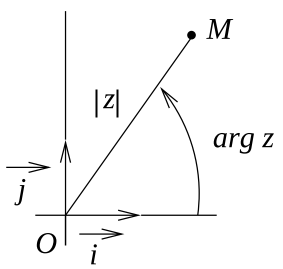
• L'affixe de G le barycentre de (A,a) (B,b) (C,c) est $z_G = \dfrac{a \cdot z_A + b \cdot z_B + c \cdot z_C}{a+b+c}$ $(a + b + c \neq 0)$.

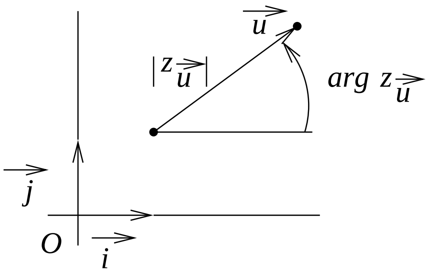
• L'affixe du vecteur $\vec{u}(x,y)$ est $z_{\vec{u}} = x + iy$.

• $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$; $z_{k\vec{u}} = k \cdot z_{\vec{u}}$

• Si M est d'affixe z alors $|z| = OM$ et $arg\ z = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ $(z \neq 0)$.

• Si $\vec{u}$ est d'affixe z alors $|z| = \|\vec{u}\|$ et $arg\ z = \left(\vec{i}, \vec{u}\right)$ $(z \neq 0)$.





• $AB = |z_B - z_A|$; $\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) = arg\ (z_B - z_A)$ (avec $A \neq B$)

• $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = arg\ \left(\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)$ (avec $A \neq B$ et $C \neq D$)

Conséquences :
• $(AB)//(CD) \Leftrightarrow arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = 0 + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ réel ($A \neq B$ et $C \neq D$)
• $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ imaginaire pur ($A \neq B$ et $C \neq D$)
• A, B, C alignés $\Leftrightarrow arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = 0 + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ réel ($A \neq B$ et $A \neq C$)
• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = r$ ($r > 0$) est le cercle de centre A et de rayon r.
• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ ($z_A \neq z_B$) est la médiatrice du segment $[AB]$.
• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $arg\,(z - z_A) = \theta + 2k\pi$ est la demi-droite partant de A (mais ne contenant pas A) dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{u}\right) = \theta$

Complexes et transformations : (M est d'affixe z, M' est d'affixe z' et Ω est d'affixe ω)
• $z' = z + b \Leftrightarrow M'$ est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ dont l'affixe est b.
• $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \Leftrightarrow M'$ est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ.
• $z' - \omega = k(z - \omega) \Leftrightarrow M'$ est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

8-4 Caractérisation d'un réel et d'un imaginaire pur

• z est réel $\Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow z = 0$ ou $arg\, z = 0 + 2k\pi$ ou $arg\, z = \pi + 2k\pi$.
• z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow z = 0$ ou $arg\, z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $arg\, z = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

► *Exemples :*
• Détermination de l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $(2 + i)z + 3 - 4i$ soit imaginaire pur.
On pose $z = x+iy$ (x et y réels). $2iz+3-4i$ imaginaire pur $\Leftrightarrow (2+i)(x+iy)+3-4i$ imaginaire pur $\Leftrightarrow (2x-y+3)+i(x+2y-4)$ imaginaire pur $\Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$. E est donc la droite d'équation $y = 2x + 3$.

• Détermination de l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-i}{z-2}$ soit réel.
Soit A d'affixe i et B d'affixe 2. $\dfrac{z-i}{z-2}$ réel $\Leftrightarrow z = i$ ou $arg\left(\dfrac{z-i}{z-2}\right) = 0 + 2k\pi$ ou $arg\left(\dfrac{z-i}{z-2}\right) = \pi + 2k\pi$ (avec $z \neq 2$).
Ce qui équivaut à $M = A$ ou $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right) = 0 + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi$ (avec $M \neq B$).
E est donc la droite (AB) privée du point B.

9 Probabilités

9-1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :
• L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.
• Un événement A est une partie de l'univers.
• Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.
• L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
• L'événement $A \cap B$ (noté aussi «A et B») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
• L'événement $A \cup B$ (noté aussi «A ou B») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
• Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
• Si $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ et si à chaque résultat possible e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que $0 \leqslant p(e_i) \leqslant 1$ et $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.
• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :
• $p(\varnothing) = 0$; $\quad p(\Omega) = 1$
• $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$; $\quad p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$; $\quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
(si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)
• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p(A) = \dfrac{\text{nb d'éléments de A}}{\text{nb d'éléments de }\Omega} = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$

► *Exemple :* Tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes avec les événements :
$p(\text{la carte tirée est un roi }) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad p(\text{la carte tirée est un coeur }) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$
$p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{et}} \text{ un coeur }) = \dfrac{1}{32}$ $\qquad p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{ou}} \text{ un coeur }) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$

9-2 Variable aléatoire

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction qui à cahque résultat possible associe un réel. Les valeurs possibles de X sont notées x_i. La probabilité que X prenne la valeur x_i est notée $p\left(X = x_i\right)$ ou p_i.

• Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.
• Espérance mathématique de X : $\quad E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$
• Variance de X : $\quad V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i)^2\right) - (E(x))^2 = p_1(x_1)^2 + \cdots + p_n(x_n)^2 - (E(x))^2$
• Ecart-type de X : $\quad \sigma(X) = \sqrt{V(x)}$

► *Exemple :* On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur perd 3 euros s'il obtient au moins un multiple de 3 et il gagne 6 euros dans le cas contraire. X est la variable aléatoire égale au gain du joueur.
Loi de probabilité de X : X ne peut prendre que les valeurs -3 et 6.
On a $p(X = 6) = \dfrac{4 \times 4 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = \dfrac{8}{27}$ et $p(X = -3) = 1 - p(X = 6) = \dfrac{19}{27}$

x	-3	6
$p(X = x)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

$E(X) = -3 \times \dfrac{19}{27} + 6 \times \dfrac{8}{27} = -\dfrac{1}{3}$; $\quad V(X) = 9 \times \dfrac{19}{27} + 36 \times \dfrac{8}{27} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{152}{9}$ $\quad$ et $\quad \sigma(X) = \sqrt{\dfrac{152}{9}} = \dfrac{2\sqrt{38}}{3}$

9-3 Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω :
• On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

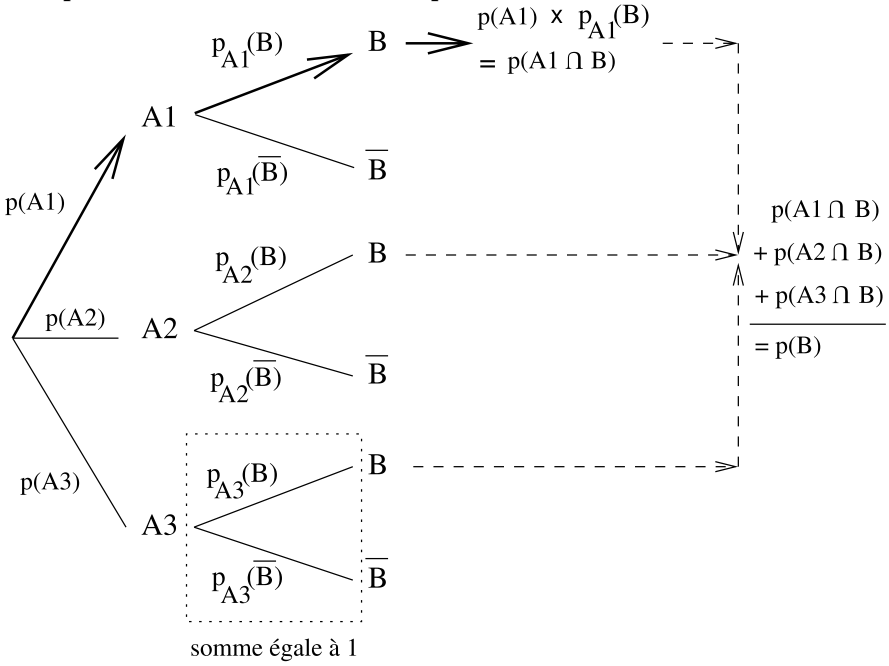
PROPRIÉTÉ

Pour tous événements non vides A et B :
• $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $\quad p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$
• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \dfrac{\text{nb de cas favorables pour A} \cap \text{B}}{\text{nb de cas favorables pour A}}$
• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales
Si A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B:
• $p(B) = p\left(A_1 \cap B\right) + \cdots + p\left(A_n \cap B\right) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

► **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**

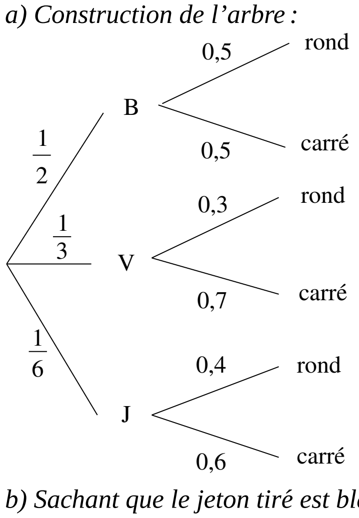


► **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**

- Sur les premières branches, on inscrit les $p\left(A_i\right)$.
- Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

► *Exemple :* Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

a) Construction de l'arbre :



b) Sachant que le jeton tiré est blanc, quelle est la probabilité pour qu'il soit carré ?

La lecture directe de l'arbre nous donne que $p_B(C) = 0{,}5$.

c) Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?

$p(R) = \dfrac{1}{2} \times 0{,}5 + \dfrac{1}{3} \times 0{,}3 + \dfrac{1}{6} \times 0{,}4 = \dfrac{5}{12}$.

d) Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?

$p_R(B) = \dfrac{p(B \cap R)}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times 0{,}5}{\frac{5}{12}} = \dfrac{3}{5}$.

9-4 Indépendance en probabilité

DÉFINITION

• Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
• Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

► *Conséquence :* Si l'on répète n fois dans les mêmes conditions la même expérience et si ces expériences A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont indépendantes, alors la probabilité de l'événement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ est égale au produit $p(A_1) \times p(A_2) \times \cdots \times p(A_n)$.

► *Exemple :* Si on lance n fois un dé, la probabilité d'obtenir n fois un nombre pair est égal à $(0{,}5)^n$.

DÉFINITION

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers.
• X et Y sont dites indépendantes si pour tous les entiers i et j possibles, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants, c'est à dire si $p\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$.

► *Exemple :* On lance deux dés : X désigne la somme et Y le produit des 2 nombres obtenus.
$p(X = 2) = \dfrac{1}{36}$ (un seul cas favorable : (1,1) et $p(Y = 3) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$ (deux cas favorables : (1,3) et (3,1)

Donc, $p(X = 2) \times p(Y = 3) = \dfrac{1}{36} \times \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{648}$

Or, $p\left((X = 2) \cap (Y = 3)\right) = 0$ (événements incompatibles). Donc, les variables ne sont pas indépendantes.

10 Combinatoire

10-1 Tirage successif avec remise . p-liste

Une urne contient 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un bleu noté B. On tire un jeton, que l'on **remet** dans l'urne avant de tirer un deuxième jeton.
Dans ce genre de tirage, on tient compte de l'ordre (il y a clairement un premier et un deuxième jeton) et un même jeton peut-être tiré plusieurs fois.

1er tirage R V B

2ème tirage R V B R V B R V B

Par rapport à l'ensemble des 3 jetons $\{\text{R,V,B}\}$, un résultat de ce tirage ((V,R) par exemple) est appelé *2-liste*.
Il y a : 3×3 =(nb de choix possibles pour le 1er tirage) $\times$ (nb de choix possibles pour le 2ème tirage) $= 9$ tirages possibles.
De façon plus générale :

DÉFINITION

• Une p-liste d'éléments d'un ensemble fini E est une liste ordonnée de p éléments de E.
• Elle est le résultat de p tirages successifs avec remise d'un élément de E.
• Dans une p-liste, un élément de E peut apparaître plusieurs fois ou pas du tout.
• Dans une p-liste, on tient compte de l'ordre : (V,R) et (R,V) sont deux 2-listes différentes.

PROPRIÉTÉ

Le nombre de p-listes d'un ensemble E de n éléments est égal à : n^p

► *Exemple 1 :* Si on tire 5 fois de suite et avec remise une carte dans un jeu de 32 cartes, on a 32^5 tirages possibles.

► *Exemple 2 :* Un code de carte bancaire comporte 4 chiffres. Le nombre de codes possibles est égal à $10^4 = 10000$.

10-2 Tirage successif sans remise . Arrangement . Permutation

Notre urne contient toujours 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un bleu noté B. On tire un jeton puis un deuxième **sans remettre** le premier dans l'urne.
Dans ce genre de tirage, on tient compte de l'ordre (il y a clairement un premier et un deuxième jeton) et un même jeton ne peut pas être tiré plusieurs fois.

1er tirage R V B

2ème tirage V B R B R V

Par rapport à l'ensemble des 3 jetons $\{$R,V,B$\}$, un résultat de ce tirage ((V,R) par exemple) est appelé *arrangement* de 2 jetons.
Il y a : $3 \times 2 =$(nb de choix possibles pour le 1er tirage) $\times$ (nb de choix possibles pour le 2ème tirage) $= 6$ tirages possibles.
De façon plus générale :

DÉFINITION

- Un arrangement de p éléments d'un ensemble fini E est une p-liste d'éléments de E **deux à deux distincts** .
- Il est le résultat de p tirages successifs sans remise d'un élément de E.
- Dans un arrangement, un élément de E ne peut apparaître au plus qu'une seule fois.
- Dans un arrangement, on tient compte de l'ordre : (V,R) et (R,V) sont deux arrangements différents.
- Dans un ensemble comportant n éléments, il ne peut y avoir d'arrangements de p éléments que si $p \leqslant n$. (on ne peut pas faire plus de n tirages successifs sans remise).

PROPRIÉTÉ

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E comportant n éléments est égal à :
$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

► *Rappel :* pour tout entier $n \geqslant 1$, $n! = n \times (n-1) \times \cdots 2 \times 1$ et par convention, $0! = 1$.

► *Exemple 1 :* Si on tire 5 fois de suite et sans remise une carte dans un jeu de 32 cartes, on a
$A_{32}^5 = 32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 = \dfrac{32!}{27!}$ tirages possibles.

► *Exemple 2 :* Dans une course comportant 15 chevaux (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo), le nombre de tiercés dans l'ordre que l'on peut former est égal à
$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = \dfrac{15!}{12!}$.

► *Remarque :* Dans un ensemble E de n éléments, une **permutation** est un arrangement de n éléments de E (c'est à dire une liste ordonnée de n éléments de E deux à deux distincts). Le nombre de permutations de E est égal à : $n!$.

10-3 Tirage simultané . Combinaison

Reprenons une derniére fois notre urne avec ces 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un bleu noté B. On tire cette-fois ci 2 jetons simultanément. Il n'y a plus d'ordre. Ce qui compte, c'est de savoir que, par exemple, on a un jeton rouge et un jeton vert.
Par rapport au tirage précédent sans remise, (V,R) et (R,V) représente le même résultat. Il ne reste donc plus que 3 tirages possibles :
avoir un jeton rouge et un jeton vert, avoir un jeton rouge et un jeton bleu et avoir un jeton vert et un jeton bleu.
Par rapport à l'ensemble E des 3 jetons $\{$R,V,B$\}$, les résultats de ce tirage simultané sont appelés *combinaisons* de 2 jetons. Ils correspondent aux parties à 2 éléments de E.
De façon plus générale :

DÉFINITION

• Une combinaison de p éléments d'un ensemble fini E est une partie de E comportant p éléments. L'ordre des éléments n'a aucune importance.
• Elle est le résultat du tirage simultané de p éléments de E.
• Dans une combinaison, un élément de E ne peut apparaître au plus qu'une seule fois.
• Dans un ensemble comportant n éléments, il ne peut y avoir de combinaisons de p éléments que si $p \leqslant n$. (on ne peut pas tirer simultanément plus de n éléments de E).

PROPRIÉTÉ

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E comportant n éléments est égal à :
$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

► *Exemple 1 :* Si on tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, on a $\binom{32}{5} = \dfrac{32!}{5! \cdot 27!}$ tirages possibles.

► *Exemple 2 :* Combien de comité de 3 membres peut-on élire parmi une assemblée de 20 personnes ?
Réponse : $\binom{20}{3} = \dfrac{20!}{3! \cdot 17!}$

10-4 Propriétés des combinaisons - Formule du binôme

PROPRIÉTÉ

Pour tout entier naturel n :
$\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$
Pour p entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$
Pour p entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

• Conséquence :

	p=0	*p=1*	*p=2*	*p=3*	*p=4*
n=0	*1*				
n=1	*1*	*1*			
n=2	*1*	*2*	*1*		
n=3	*1*	*3*	*3*	*1*	
n=4	*1*	*4*	*6*	*4*	*1*

Calcul des combinaisons de proche en proche par le triangle de Pascal

PROPRIÉTÉ

Formule du binôme : Pour tous complexes a et b et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{p} a^{n-p} b^p + \cdots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$

Avec la notation somme : $(a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

► *Exemple :* $(2+x)^4 = 1 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot x^1 + 6 \cdot 2^2 \cdot x^2 + 4 \cdot 2^1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 4x^3 + x^4.$

► *Conséquence :*
Le nombre total de parties d'un ensemble de n éléments est égal à 2^n.

En effet, ce nombre est égal à la somme :
nombre des parties à 0 élément + nombre des parties à 1 élément $+\cdots+$ nombre de parties à n éléments
$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$

11 Lois de probabilités

11-1 Loi binomiale

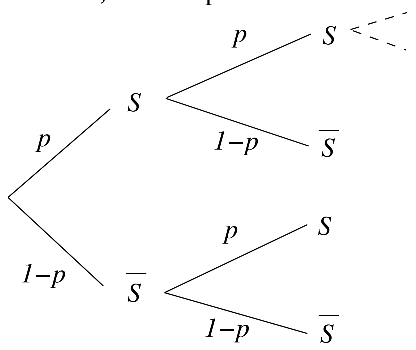
DÉFINITION

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

► *Exemples :*
• Lancer une pièce avec pour issues contraires «pile» et «face» est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer notre pièce 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .
• Jouer au Loto en s'intéressant aux événements contraires «avoir les 6 bons numéros» et «ne pas avoir les 6 bons numéros» est une *épreuve* de Bernoulli. Par contre, si on s'intéresse aux quatres événements «avoir n bons numéros» ($3 \leqslant n \leqslant 6$), ce n'est plus une épreuve de Bernoulli.
► *Remarques :*
• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour «succès») et $\overline{S}$ (ou E pour «échec»). La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1-p)$, qui est aussi quelquefois notée q).
• Pour s'assurer que l'on a bien affaire à un *schéma* de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolément n'admet que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre), que le «succès» a toujours la même probabilité d'apparaître et qu'il y a bien indépendance entre chacune des *épreuves* de Bernoulli successives.

DÉFINITION - PROPRIÉTÉS

Etant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répèter n fois de manière indépendante cette épreuve.
Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.



n épreuves

• Probabilité d'obtenir k succès : $p(X=k)=\binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$
(k entier tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$)
• Espérance de X : $E(X)=np$
• Variance et écart-type de X : $V(X)=np(1-p)$; $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

► *Exemple 1 :* On lance un dé normal 10 fois de suite et on s'intéresse au nombre X de fois où l'on a obtenu le chiffre 6. Cela correspond à un schéma de Bernoulli consistant à répéter 10 fois l'épreuve de Bernoulli où S est l'événement «obtenir un 6» et dont la probabilité est $p=\frac{1}{6}$. X représente en fait le nombre de fois où est apparu un «succès». La loi de probabilité de X est donc une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir 8 fois le chiffre 6 est donc : $p(X=8)=\binom{10}{8}\ \left(\frac{1}{6}\right)^8\ \left(\frac{5}{6}\right)^2$

L'espérance de X (nombre moyen de fois où on obtient le chiffre 6) est : $E(X)=10\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{3}$

11-2 Exemples de lois de probabilités continues

DÉFINITION

Etant donné f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I telle que :

• si $I=[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=1$

• si $I=[a,+\infty[$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt=1$

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de probabilité continue de densité f sur I** si pour tous réels x et y de I :

• $p(x\leqslant X\leqslant y)=\displaystyle\int_x^y f(t)\,dt.$

• $p(X\leqslant x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

• $p(X\geqslant x)=1-\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt.$

(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

► *Remarque :* la probabilité $p(X\leqslant x)$ représente «l'aire sous la courbe» de $t\mapsto f(t)$ pour $t\in[a,x]$.

DÉFINITION

• Si la densité f est définie sur $I=[0,1]$ par $f(t)=1$, la loi de probabilité est dite **loi uniforme** sur $[0,1]$.

• Si la densité f est définie sur $I=[0,+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ ($\lambda>0$), la loi de probabilité est dite **loi exponentielle** de paramètre λ sur $[0,+\infty[$.

► *Remarque :* On a bien $\displaystyle\int_0^1 1\cdot dt=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt=1.$

► *Exemple 1 :*
Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
On a alors :

$p(0{,}1\leqslant X\leqslant 0{,}3)=\displaystyle\int_{0,1}^{0,3}1\,dt=[t]_{0,1}^{0,3}=0{,}3-0{,}1=0{,}2$

$p(X<0{,}5)=\displaystyle\int_0^{0,5}1\,dt=0{,}5$

$p(X\geqslant 0{,}6)=1-\displaystyle\int_0^{0,6}1\,dt=1-0{,}6=0{,}4$

$p(X=0{,}4)=\displaystyle\int_{0,4}^{0,4}1\,dt=0$

► *Exemple 2 :*
La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}0006$ sur $[0,+\infty[$.

a) La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est donnée par :
$p(X<1000)=\displaystyle\int_0^{1000}0{,}0006e^{-0{,}0006t}\,dt=\left[-e^{-0{,}0006t}\right]_0^{1000}=1-e^{-0{,}6}.$

b) La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 500 heures est donnée par :
$p(X>500)=1-\displaystyle\int_0^{500}0{,}0006e^{-0{,}0006t}\,dt=1-\left[-e^{-0{,}0006t}\right]_0^{500}=e^{-0{,}3}.$

12 Statistique : adéquation de données à une loi équirépartie

PROPRIÉTÉ

Soit une épreuve conduisant aux issues a_1, a_2, $\cdots$,a_q.
On note $N = a_1 + a_2 + \cdots + a_q$ et $f_1 = \dfrac{a_1}{N}$,$f_2 = \dfrac{a_2}{N}$, $\cdots$, $f_q = \dfrac{a_q}{N}$, les fréquences correspondantes aux différentes issues.
On considère alors le nombre $d^2 = \left(f_1 - \dfrac{1}{q}\right)^2 + \left(f_2 - \dfrac{1}{q}\right)^2 + \cdots + \left(f_q - \dfrac{1}{q}\right)^2$.
(f_i représente la probabilité de l'issue a_i et $\dfrac{1}{q}$ représente ce que serait cette même probabilité si l'expérience était conforme au modèle de la loi uniforme)

Expérimentalement, si on répète n fois cette épreuve $(n \geqslant 100)$, on obtient une série statistique formée par les n valeurs de d^2 obtenues.
En notant D_9 le neuvième décile de cette série, on a la propriété suivante :
• Si $d^2 \leqslant D9$, alors on dit que les données sont compatibles avec le modèle de la loi uniforme avec un risque d'erreur inférieur à 10%.
• Si $d^2 > D9$, alors on dit que les données ne sont pas compatibles avec le modèle de la loi uniforme avec un risque d'erreur inférieur à 10%.
(Rappel : On appelle neuvième décile d'une série statistique, le nombre noté D_9 tel que 90% des valeurs de la série statistique soient inférieures ou égales à D_9)

► *Exemple :*
Un sac contient plusieurs milliers de pièces de monnaie de 3 types : des pièces de 10 centimes, des pièces de 20 centimes et des pièces de 50 centimes. On effectue, au hasard, 400 prélèvements d'une pièce avec remise et on obtient les résultats suivants :

Pièce	10 centimes	20 centimes	50 centimes
Effectifs	146	118	136

1) La valeur de d^2 associée à cette expérience est :

$$d^2 = \left(\frac{146}{400} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{118}{400} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{136}{400} - \frac{1}{3}\right)^2 \approx 0{,}0025$$

2) Pour savoir si on peut considérer que le sac contient autant de pièces de chaque type avec un risque d'erreur inférieur à 10%, on procède à 1000 simulations sur ordinateur de l'opération consistant au tirage avec remise de 400 pièces. A chaque simulation on calcule la valeur de d^2 et on obtient la répartition suivante :

Valeur de $400d^2$	$[0; 0{,}5[$	$[0{,}5; 1[$	$[1; 1{,}5[$	$[1{,}5; 2[$	$[2; 2{,}5[$	$[2{,}5; 3[$
Effectifs	539	235	122	51	41	12

Cherchons une valeur approchée à 0,5 près par défaut du neuvième décile de la série des $400d^2$:
$539 + 235 + 122$ représente moins de 90% de l'effectif alors que $539 + 235 + 122 + 51$ représente plus de 90% de l'effectif. Le neuvième décile est donc dans l'intervalle $[1{,}5; 2[$. Une valeur approchée à 0,5 près par défaut est donc $1{,}5$.

On en déduit qu'une valeur approchée du neuvième décile de la série des d^2 est $D_9 = \dfrac{1{,}5}{400} = 0{,}00375$.

Comme $d^2 \leqslant D_9$, on peut considérer que les données sont compatibles avec le modèle de la loi uniforme avec un risque d'erreur inférieur à 10% c'est à dire que le sac contient autant de pièces de chaque type avec un risque d'erreur inférieur à 10% .