Les limites.

I Définitions et exemples.

Remarque préliminaire. Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ donc dans les définitions il suffit de remplacer x par n. Pour les suites la notion de limite n'a de sens qu'en $+\infty$ alors que pour les fonctions on peut rechercher la limite en tout point de l'ensemble de définition et aux bornes de cet ensemble.

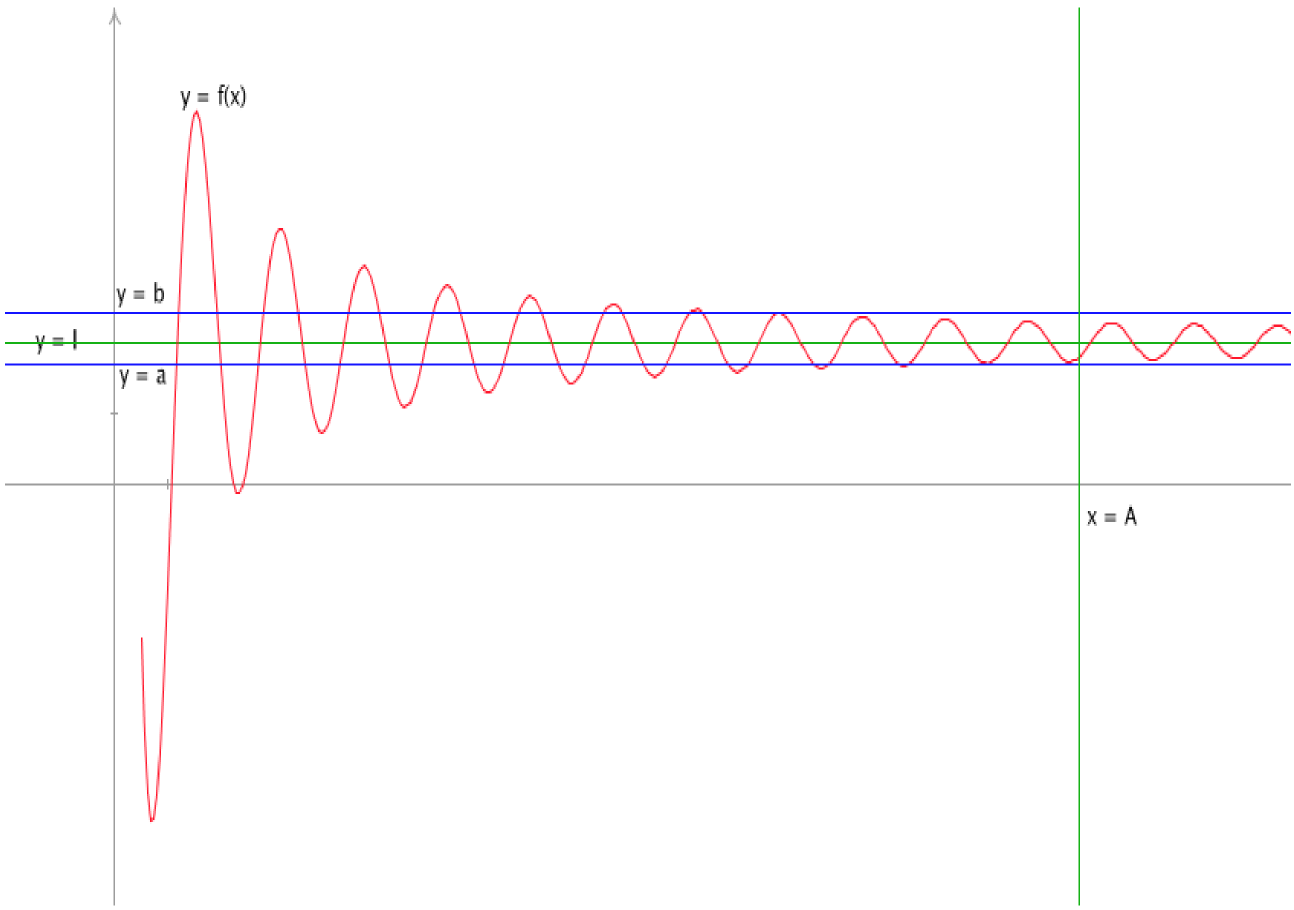
1 Limite finie à l'infini.

a *Définitions*

La fonction *f* définie sur un intervalle $]x_0\,;+\infty[$ a pour limite l en $+\infty$ signifie que **« tout intervalle ouvert contenant *l* contient toutes les valeurs $f(x)$ dés que *x* est assez grand »**

La suite (u_n) a pour limite l en $+\infty$ signifie que **« tout intervalle ouvert contenant *l* contient toutes les valeurs u_n dés que *n* est assez grand »**

b *Interprétation graphique.*



Dés que *x* est assez grand, plus grand que *A*, toute la courbe de f est comprise entre les droites d'équation $y=a$ et $y=b$.
La droite d'équation $y=l$ est une asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$.

c *Exemple.*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \to \dfrac{1}{x}$

On conjecture que f a pour limite 0 en $+\infty$.

On considère l'intervalle ouvert $]a\,;b[$ contenant 0 donc $a<0$ et $b>0$.

Pour simplifier les calculs on choisit un intervalle ouvert de centre *l* inclus dans $]a\,;b[$

Soit $k>0$ tel que $k \leqslant b$ et $k \leqslant |a|$, $]-k\,;k[\subset]a\,;b[$.

(On peut toujours choisir un intervalle centré en *l* inclus dans]*a* ; *b*[. Dans la suite on prendras donc un intervalle de la forme] *l-k* ; *l+k* [ )

Recherche d'une condition nécessaire

$$f(x) \in]-k\,;k[\;\Rightarrow\; -k < \frac{1}{x} < k$$

$$x \to +\infty \;\Rightarrow\; x>0 \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{x} < k \;\Rightarrow\; x > \frac{1}{k}.$$

La condition est suffisante.

On pose $A = \dfrac{1}{k}$

$$x > A \;\Rightarrow\; x > \frac{1}{k} > 0 \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{x} = f(x) < k \;\Rightarrow\; f(x) \in]-k\,;k[\subset]a\,;b[.$$

Dès que *x* est assez grand, c'est à dire supérieur à A, tous les $f(x)$ sont dans l'intervalle]*a* ; *b*[donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

d *Limite fini en moins l'infini.*

La fonction *f* définie sur un intervalle $]x_0\,;+\infty[$ a pour limite l en $-\infty$ si **« tout intervalle ouvert contenant *l* contient toutes les valeurs $f(x)$ dés que *x* est assez grand en valeur absolu et négatif »**

e *Une fonction qui n'a pas de limite en* $+\infty$.

La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

2 **Limite finie en *a*.**

a *Définition.*

a appartient à l'ensemble de définition de f ou est une borne de cet ensemble.

La fonction *f* définie a pour limite l en *a* signifie que **« tout intervalle ouvert contenant *l* contient toutes les valeurs $f(x)$ dés que *x* est assez près de *a* »** b *Exemple.*

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f : x \to x^2 - 3$, montrons qu'elle a pour limite 1 en 2.
Soit k >0 et petit (k < 1), on considère l'intervalle ouvert] 1-k ; 1+k [.

Recherche d'une condition nécessaire.

$f(x) \in]1-k ; 1+k[\Rightarrow 1-k < x^2 - 3 < 1+k \Rightarrow 4-k < x^2 < 4+k$
On a choisi k petit donc 4-k >0 et $x^2 > 0$ donc $\sqrt{4-k} < x < \sqrt{4+k}$

La définition dit « dés que x assez proche de 2 » donc il faut encadrer x par 2 – h et 2 + h et trouver h tel que : $\sqrt{4-k} < 2-h$ et $2+h < \sqrt{4+k}$.
Sans faire de grand calcul on peut voir que $h = \frac{k}{10}$ convient, en effet :

$$(2-\frac{k}{10})^2 = 4 - \frac{2k}{5} + \frac{k^2}{100} > 4 - \frac{2k}{5} > 4-k \Rightarrow (2-\frac{k}{10}) > \sqrt{4-k}$$

$0 < k < 1$ donc $k^2 < k$ et

$$(2+\frac{k}{10})^2 = 4 + \frac{2k}{5} + \frac{k^2}{100} < 4 + \frac{2k}{5} + \frac{k}{100} < 4 + k (2+\frac{k}{10}) > \sqrt{4+k}$$

La condition est suffisante.

Soit x tel que $(2-\frac{k}{10})^2 < x^2 < (2+\frac{k}{10})^2$ k est petit et k >0 donc $2-\frac{k}{10} > 0$ et $k^2 > 0$
D'après le calcul ci-dessus :

$$4-k < (2-\frac{k}{10})^2 < x^2 < (2+\frac{k}{10})^2 < 4+k \Rightarrow 1-k < x^2 - 3 < 1+k$$

$f(x) \in]1-k ; 1+k[$ dès que x est assez proche de 2, $|x-2| < \frac{k}{10}$
donc $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

On voit que cette définition est difficile à appliquer. La « vrai » définition mathématique est peut être plus facile à appliquer mais il faut toujours savoir minorer et majorer correctement des expressions algébrique.

Définition mathématique de $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$. .
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que pour tout x , vérifiant $|x-2| < \eta$ alors $|f(x) - 1| < \epsilon$
$\forall$ se lit quelque soit et $\exists$ il existe.

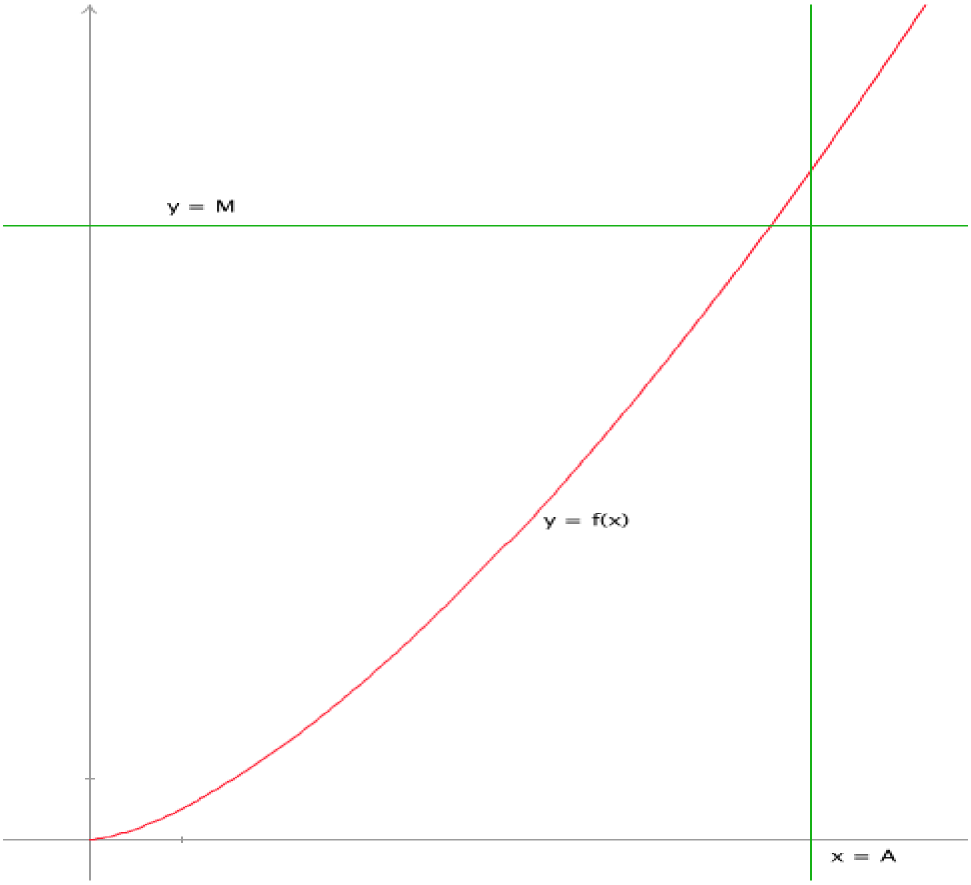
3 **Limite infinie à l'infini.**

a *Définitions*

La fonction *f* définie sur un intervalle $]x_0 ; +\infty[$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si **« tout intervalle ouvert $]M ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que *x* est assez grand »**

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si « **tout intervalle ouvert** $]M\,;+\infty[$ **contient toutes les valeurs** u_n **dés que *n* est assez grand** »

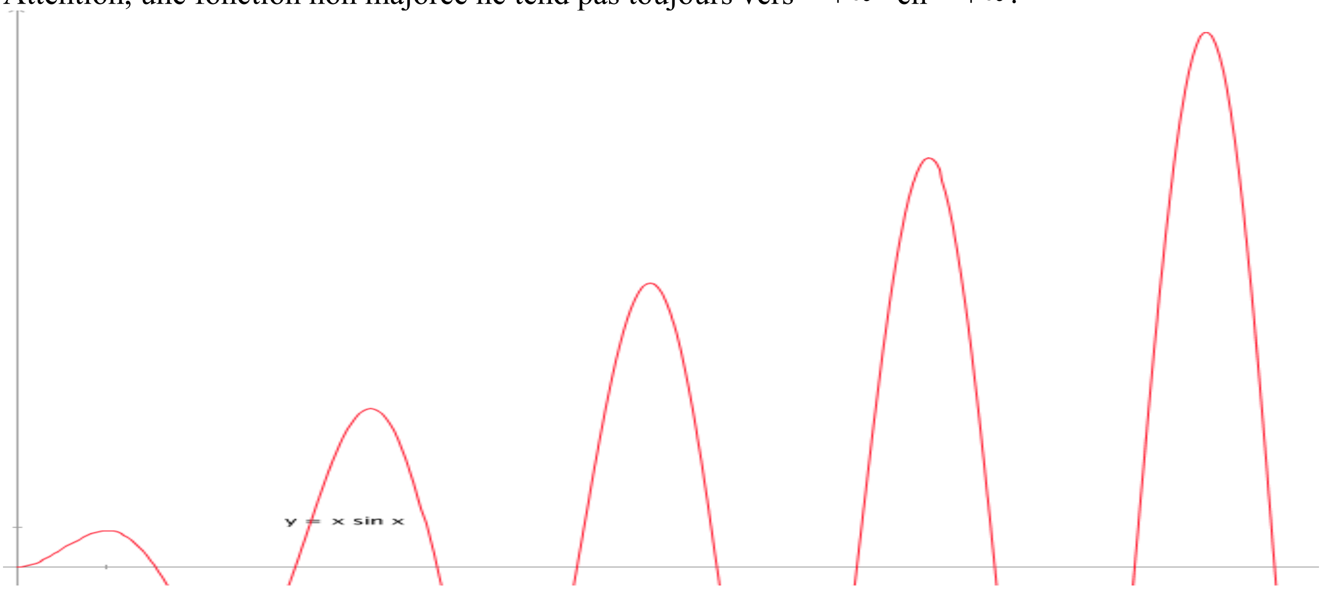
b *Interprétation graphique*



Toute la courbe de *f* est au dessus de la droite d'équation $y = M$ dès que x est assez grand, $x > A$.

Conséquence directe.
La fonction n'est pas majorée.

Attention, une fonction non majorée ne tend pas toujours vers $+\infty$ en $+\infty$.



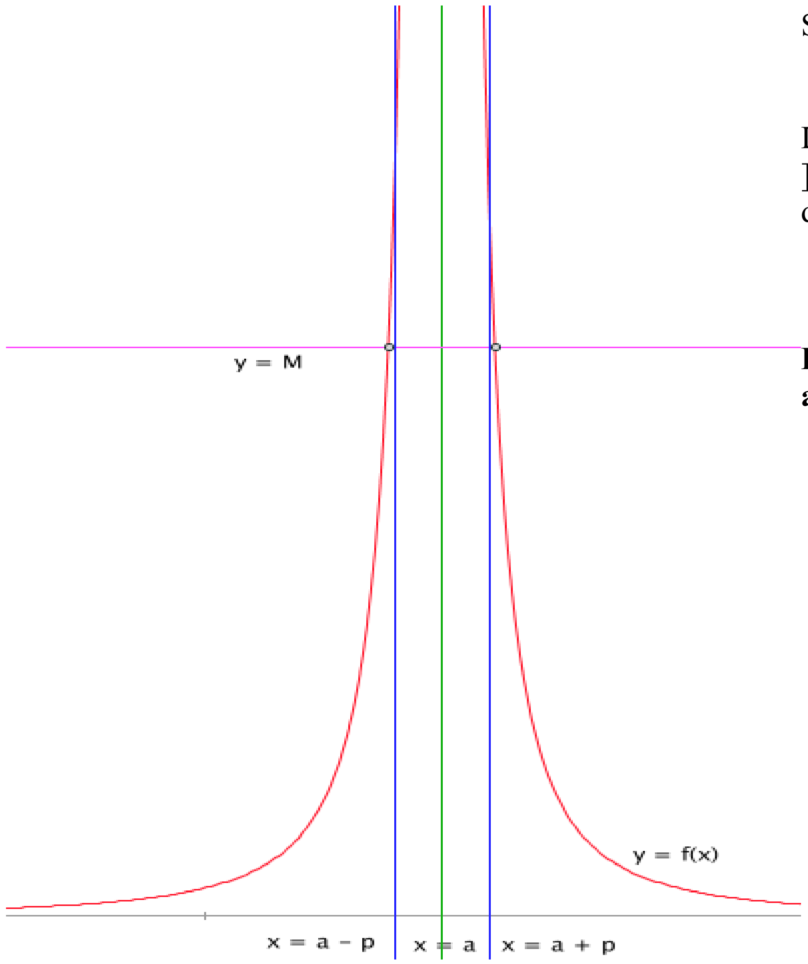
4 Limite infinie en *a*.

a *Définition*

a appartient à l'ensemble de définition de f ou est une borne de cet ensemble.

La fonction *f* a pour limite $+\infty$ en *a* si **« tout intervalle ouvert $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dés que *x* est assez près de *a*»**

b *Interprétation graphique*



Si *x* est assez près de *a*, |*x*-*a*| < p, alors $f(x)\in]M\,;+\infty[$.

La courbe de *f* sur l'intervalle]a-p ; a+p[est au dessus de la droite d'équation *y* = *M*.

La droite d'équation x = a est une asymptote verticale à la courbe de *f*.

II Propriétés.

1 Unicité

α représente un réel ou un infini.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l'$ alors $l=l'$.

Démonstration.

Supposons $l\neq l'$

On pose $k=\frac{|l-l'|}{2}>0$, $I=]l-k\,;l+k[$ et $I=]l'-k\,;l'+k[$

$I\neq\emptyset$, $I'\neq\emptyset$ et $I\cap I'=\emptyset$

Dès que x est assez proche de α tous les $f(x)$ sont dans I et dans I' donc $f(x) \in I \cap I' = \emptyset$ Absurde donc l'hypothèse est fausse et $l = l'$.

2 Signe

Si $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$ et $l > 0$ alors $f(x) > 0$ dés que x est assez proche (assez grand si α est infinie) de α.

Si $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$ et $l < 0$ alors $f(x) < 0$ dés que x est assez proche (assez grand si α est infinie) de α.

III Suites et fonctions monotones.

1 Limite infinie.

Théorème

Toute suite ou fonction (définie sur un intervalle $]a ; +\infty[$) croissante non majorée a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

C'est une conséquence directe de la définition.

Rappel sur les majorants.

La fonction f est majorée sur un intervalle I signifie qu'il existe un réel M $(\exists M)$ tel que pour tout x $(\forall x)$ de I $f(x) \leqslant M$.

Proposition contraire : non majorée.
La fonction f est non majorée sur un intervalle I signifie que quel que soit M $(\forall M)$ il existe x $(\exists x)$ de I tel que $f(x) > M$.

On peut remarquer que (Non $\exists$)$=\forall$ et (Non $\forall$)$=\exists$ et (Non $\leqslant$) = $>$

Démonstration.

Soit un intervalle $]M ; +\infty[$
f est non majorée il existe x_0 tel que $f(x_0) > M$
f est croissante donc pour tout $x > x_0$ $f(x) \geqslant f(x_0) > M$
Donc dès que $x > x_0$, $f(x) \in]M ; +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Théorème

Toute suite ou fonction (définie sur un intervalle $]a ; +\infty[$) décroissante non minorée a pour limite $-\infty$ en $+\infty$.
C'est une conséquence directe de la définition.

2 Limites finis

Théorèmes admis.

Toute suite ou fonction croissante majorée a une limite l en $+\infty$.

Toute suite ou fonction décroissante minorée a pour limite l en $+\infty$.

3 Suites adjacentes.

Théorème

Si à partir d'un certain rang n_0

$u_n > v_n$;

(u_n) est décroissante et (v_n) est croissante

et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$

alors (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite *l.*

Démonstration

(u_n) est décroissante et minorée par v_{n_0} donc converge vers l

(v_n) est croissante et majorée par u_{n_0} donc converge vers l'

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l - l' = 0$ donc $l = l'$

IV Théorème des gendarmes.

1 Limite finie *l.*

Théorème

Si pour tout x assez proche de a $g(x) < f(x) < h(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Si pour tout n assez grand $v_n < u_n < w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Démonstration

Soit $k > 0$ et $I =]l-k ; l+k[$

Dès que x est assez proche de a, tous les $g(x)$ et $h(x)$ sont dans I donc $l - k < g(x)$ et $h(x) < l + k$

On sait que pour tout x $g(x) < f(x) < h(x)$ donc $l - k < f(x) < l + k$ et $f(x) \in I$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

2 Limite infinie.

Théorème

Si pour tout x assez proche de a $g(x) < f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Si à partir d'un certain rang $v_n < u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Si pour tout x assez proche de a $g(x) > f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Si à partir d'un certain rang $v_n > u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

V Opérations.

1 Cas général.

Théorème

Si deux fonctions ont pour limite l et l' finies et non nulles alors la limite de la somme, produit, rapport, ... est la somme, produit, rapport, ... des limites.

2 Autre cas.

Théorème

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est infinie. Il faut faire une étude de signe.

Théorème

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ est infinie et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ n'est pas infinie alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

Sur le brouillon on peut écrire $\dfrac{1}{0}=\infty$ et $\dfrac{1}{\infty}=0$ Pas sur la copie.

3 Formes indéterminées.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est indéterminée (F.I.).

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ est infinie et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ est infinie alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est F.I.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x)$ est F.I.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)$ est F.I.

Sur le brouillon on peut écrire :

$\dfrac{0}{0}=F.I.$ $\quad \dfrac{\infty}{\infty}=F.I.$ $\quad 0\times\infty=F.I.$ $\quad +\infty-\infty=F.I.$ Pas sur la copie.

Technique

Il faut changer la forme.

En ∞ on factorise le terme dominant (plus haut degré ou exponentielle)

En α on factorise le $(x-\alpha)$

Pour supprimer un radical $(\sqrt{\ })$ on se sert de la quantité conjuguée.

$A-B$ et $A+B$ sont des quantités conjuguées.

VI Fonctions composées

α, β et l sont finis ou infinis.

On rappelle que $f \circ g(x) = f(g(x))$

1 Fonctions réelles.

Théorème

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to \beta} g(x) = \alpha$ alors $\lim\limits_{x \to \beta} f(g(x)) = l$.

2 Fonctions et suites.

Théorème

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(u_n) = l$.

3 Application

Théorème

Une fonction périodique n'a pas de limite en $+\infty$.

Rappel de la définition

f est périodique signifie qu'il existe un nombre $S \neq 0$ tel que :

$$x \in D_f \Rightarrow x + S \in D_f \text{ et } f(x+S) = f(x)$$

La période *T* est le plus nombre strictement positif qui vérifie la proposition ci-dessus.

Remarque

On élimine les fonctions constantes car dans ce cas *T*=0.

Démonstration

f n'est pas constante donc il existe $a \in D_f$ et $b \in D_f$ tels que $f(a) \neq f(b)$

La suite (u_n) définie par $u_n = f(a + nT)$ est constante et a pour limite $f(a)$ donc si f a une limite elle est égale à $f(a)$.

La suite (v_n) définie par $v_n = f(b + nT)$ est constante et a pour limite $f(b)$ donc si f a une limite elle est égale à $f(b)$.

$f(a) \neq f(b)$ d'après le théorème d'unicité de la limite f n'a pas de limite en $+\infty$

VII Suites extraites.

1 Définition.

Définition

Une suite extraite de la suite (u_n) est une suite qui a un nombre infini de termes et qu'on a construit en supprimant certains termes de (u_n)

Exemples.

Pour $k \in \mathbb{N}$, la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+k}$
On a supprimé les *k* premiers termes.

La suite (v_n) définie par $v_n = u_{2n}$
On a supprimé tous les termes de rang impair.

2 Limites.

Théorème
Si (u_n) a une limite alors tout suite extraite a la même limite que (u_n).

3 Applications aux suites définies par récurrences.

Rappel de la définition
(u_n) est définie par son premier terme u_0 ou u_1 (ou ces deux premiers termes ou certains des premiers termes et une relation entre le terme général et le terme précédent (ou les deux termes précédents ou certains termes précédents).
On se limitera en TS à étudier les suites définies $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $u_{n+2} = f(u_{n+1}; u_n)$

Théorème
Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$
Si (u_n) converge alors sa limite l est solution de l'équation $x = f(x)$

Théorème bis
Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+2} = f(u_{n+1}; u_n)$
Si (u_n) converge alors sa limite l est solution de l'équation $x = f(x; x)$

Démonstration
Si (u_n) converge vers l (u_{n+1}) et (u_{n+2}) sont des suites extraites et converge vers *l*

$$l = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \to +\infty} u_n) = f(l)$$

$$l = \lim_{n \to +\infty} u_{n+2} = \lim_{n \to +\infty} f(u_{n+1}; u_n) = f(\lim_{n \to +\infty} u_{n+1}; \lim_{n \to +\infty} u_n) = f(l; l)$$

Exemple 1
(u_n) est définie par $u_{n+1} = u_n^2 - 2$
Si (u_n) converge vers *l* alors *l* est solution de l'équation $l = l^2 - 2$

$$l^2 - l - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 = 3^2$$

$$l_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad l_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

La limite possible (candidate mais pas obligatoirement élue) est -1 ou 2

Graphiquement.
Aller voir le cours sur les suites récurrentes.

4 Démontrer qu'une suite n'a pas de limite.

Exemple de suite n'ayant pas de limite

Soit (u_n) définie par $u_n = \sin(\frac{\pi}{2} n)$

Démonstration

Première étape

Soit la suite extraite (v_n) définie par $v_n = u_{2n}$

Calcul des premiers termes : $v_0 = u_0 = \sin 0 = 0$, $v_1 = u_2 = \sin \pi = 0$, $v_2 = u_4 = \sin 2\pi = 0$.

Calcul du terme général : $v_n = u_{2n} = \sin(\frac{\pi}{2} 2n) = \sin(n\pi) = 0$

Conséquence du théorème : si (u_n) a une limite elle est égale à 0.

Deuxième étape

Soit la suite extraite (w_n) définie par $v_n = u_{4n+1}$

Calcul des premiers termes :

$w_0 = u_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $w_1 = u_5 = \sin(5\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $w_2 = u_9 = \sin(9\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

Calcul du terme général : $v_n = u_{4n+1} = \sin(\frac{\pi}{2}(4n+1)) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$

Conséquence du théorème : si (u_n) a une limite elle est égale à 1.

Conclusion

La limite d'une suite est unique donc (u_n) n'a pas de limite.

VII Asymptotes à C courbe représentative de f

1 Asymptote horizontale à l'infini

Définition 1

La droite d'équation $y = l$ est une asymptote de la courbe ***C*** en $+\infty$ signifie que $\lim_{x \to +\infty} f(x) - l = 0$.

Conséquence directe

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = a$ est une asymptote de la courbe ***C*** en $+\infty$

Définition 1

La droite d'équation $y = l$ est une asymptote de la courbe ***C*** en $-\infty$ signifie que $\lim_{x \to -\infty} f(x) - l = 0$.

Conséquence directe

Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = a$ est une asymptote de la courbe ***C*** en $-\infty$

2 **Asymptote verticale en a**

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ est infinie alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote de la courbe ***C*** en a

3 Asymptote oblique à l'infinie

Définition 1
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote de la courbe ***C*** en $+\infty$ signifie que $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Conséquence directe.
On peut écrire la fonction f sous la forme $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Exemple
La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ par $f(x) = \frac{5x^2 + 3x - 2}{3x + 1}$ peut s'écrire $f(x) = \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{22}{9(3x + 1)}$ et a pour asymptote oblique la droite d'équation $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{9}$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Définition 2
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote de la courbe ***C*** en $-\infty$ signifie que $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Conséquence directe.
On peut écrire la fonction f sous la forme $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$