Exponentielle et logarithme de base a , $a>0$ et $a\neq 1$.

Rappel.

Le logarithme népérien, ln, est défini comme la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction inverse, $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$, qui s'annule en 0.

ln est continue et strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ensemble des images, donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous assure que tout réel, *y,* à un antécédent unique, *x,* par ln. La fonction ln admet donc une application réciproque de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$, la fonction exponentielle notée exp.

En particulier, l'antécédent de 1 est le nombre *e* et $\exp(x)=e^x$

$$\ln e=1, \quad \ln e^x = x \text{ et pour } x>0, \quad e^{\ln x}=x$$

<u>On appelle le nombre e, la base du logarithme népérien et de La fonction exponentielle.</u>

Remarque.

La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$ donc pour $k\neq 0$ la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$ définie par $f(x)=e^{kx}$, est aussi une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.

Démonstration. $f'(x)=k\,e^{kx}$ à le même signe que k. *f* est strictement monotone, continue de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$ et le le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous assure que *f* est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.

Exponentielle et logarithme de base *a*.

On peut définir pour tout $a>0$ et $a\neq 1$ la fonction exponentielle de base a par :

$$\begin{array}{rcl} \exp_a : \mathbb{R} & \rightarrow &]0\ ;\ +\infty[\\ x & \rightarrow & a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} \end{array}$$

et la fonction logarithme de base *a* comme la fonction réciproque de $\exp_a$ par :

$$\begin{array}{rcl} \log_a :]0\ ;\ +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \log_a x \end{array}$$

Relation entre ln et $\log_a$

Pour tout $x>0$, $y=\log_a x$ vérifie $x=a^y$

$\ln x = \ln a^y = y \ln a = \log_a x \ \ln a$, $a\neq 1$ donc $\ln a \neq 0$ et :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Donc, par définition, toutes les fonctions exponentielles ont les mêmes propriétés algébriques et toutes les fonctions logarithmes ont les mêmes propriétés algébriques.

Propriétés fondamentales :

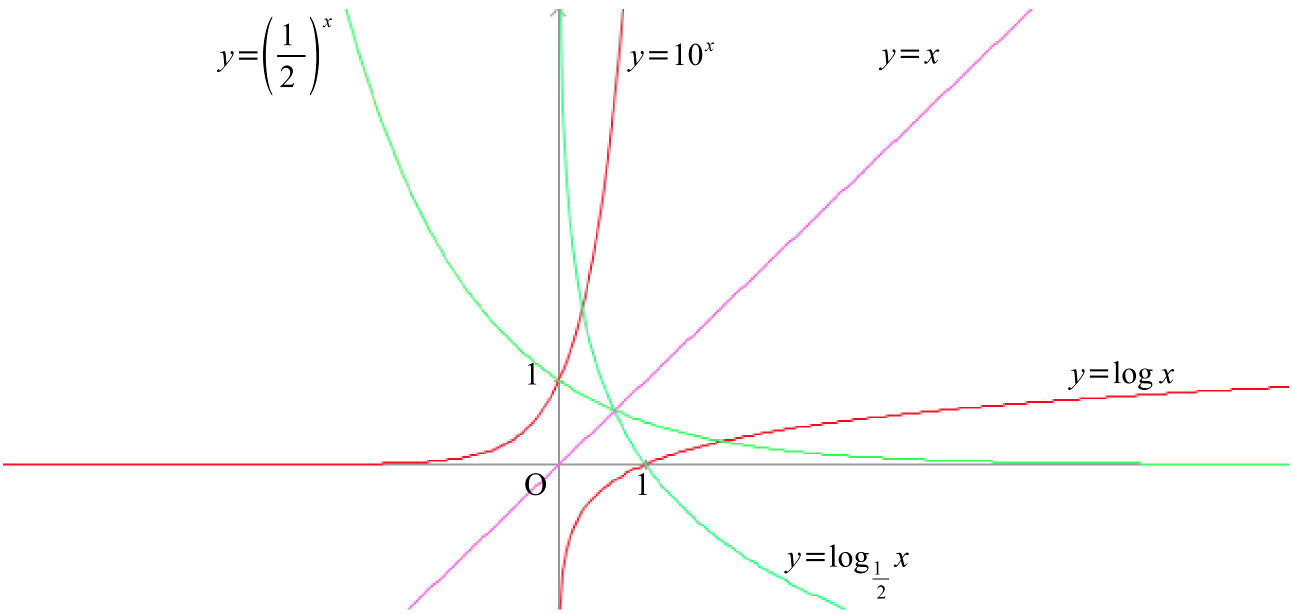
$$a^{x+y}=a^x a^y \quad \text{et pour} \quad x>0,\quad y>0,\quad \log_a xy=\log_a x+\log_a y$$
$$a^0=1,\quad a^1=a \quad \text{donc} \quad \log_a 1=0,\quad \log_a a=1$$
$$\text{Pour} \quad x>0,\quad a^{\log_a x}=x \quad \text{et} \quad \log_a a^x=x$$

Dérivées et variations.

$$\left(a^x\right)'=\left(e^{x\ln a}\right)'=\ln a\ e^{x\ln a}=\ln a\ a^x$$
$$\left(\log_a x\right)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ \ln a}$$

Si $0<a<1$, $\ln a<0$ et les fonctions dérivées sont strictement négatives. Donc, si $0<a<1$, $\exp_a$ est strictement décroissante positive et $\log_a$ est strictement décroissante, strictement positive sur $]0\ ;1[$ et strictement négative sur $]1\ ;+\infty[$

Représentation graphique



Le logarithme de base 10 ou logarithme décimal

On le note log. Il a longtemps servi à faire les calculs approchés compliqués. Son intérêt vient de la formule $\log 10^n=n$

$\log\left(a_0,a_1a_2\dots a_n\times 10^n\right)=n+\log\left(a_0,a_1a_2\dots a_n\right)$ où $a_0,a_1a_2\dots a_n$ est l'écriture décimale donc il suffit de connaître $\log\left(a_0,a_1a_2\dots a_n\right)$ pour effectuer les calculs.

Les logarithmes décimaux des nombres compris entre 1 et 10 sont répertoriés dans la table de logarithmes. Pour plus de renseignements suivre le lien (souligné).