Le logarithme népérien

I Les primitives

1 Définition.

La fonction *F*, dérivable sur l'intervalle *I*, est une primitive sur *I* de la fonction *f*, définie sur *I*, signifie que *f* est la dérivée de *F* sur *I*.

Autrement dit : pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque. *F* est dérivable sur *I* donc elle est définie et continue sur *I*.

2 Exemple.

On a vu en classe, en exercice, que la fonction $f : t \to \frac{e^t}{t}$ définie sur $[1\ ;+\infty[$ admet une primitive.
Sujet :
http://www.ac-bordeaux.fr/APMEP/Fichier%20annales/dossier%20S/dossier%202005/PondicheryS2005.pdf
Corrigé :
http://www.ac-bordeaux.fr/APMEP/Fichier%20annales/dossier%20S/dossier%202005/CorrigePondicheryS2005.pdf

3 Théorème d'existence.

Toute fonction continue sur un intervalle *I* admet une primitive sur *I*.

On admettra ce théorème. On démontrera l'existence, dans un prochain chapitre, dans le cas particulier où la fonction est croissante. Il suffit de généraliser l'exemple ci-dessus.

4 Unicité ?

Théorème 1. Soit $k \in \mathbb{R}$, si *F* est une primitive de *f* sur *I* alors *G,* définie sur *I* par $G : x \to F(x) + k$, est une primitive de *f*.

Démonstration. $G' = F' = f$.

Théorème 2. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $a \in I$, si *f* est continue sur *I* elle admet une unique primitive *F* sur *I* vérifiant $F(a) = b$.

Démonstration. Le théorème d'existence assure que *f* a une primitive *H* et le théorème 1 que *F* définie par $F(x) = H(x) + k$ est aussi une primitive. En posant $k = b - H(a)$ alors $F(a) = b$.
Si *F* et *G* sont deux primitives sur *I* vérifiant $F(a) = G(a) = b$ alors $G' - F' = 0$.
$G - F$ est constante et $(G - F)(a) = 0$ donc $G = F$.

Conséquence. Une fonction continue à une infinité de primitives qui diffèrent entre elles par une constante.

II La fonction logarithme népérien.

La fonction inverse est continue sur $]0\ ;+\infty[$ et admet donc une primitive.

1 Définition.

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Autrement dit : $D_{\ln}=]0\ ;+\infty[$, pour tout $x\in]0\ ;+\infty[$, $(\ln)'(x)=\frac{1}{x}$ et $\ln(1)=0$.

Conséquence directe. La fonction logarithme népérien est dérivable donc continue et strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

2 Histoire du logarithme népérien.

Le logarithme népérien a été inventé avant même que le concept de fonction soit défini et donc il n'a pas été défini comme une primitive notion encore plus « inconnue » à l'époque.
Neper l'a inventé pour simplifier les calculs et plus précisément les calculs astronomiques. Il cherchait une méthode pour transformer les multiplications en additions (voir la relation fondamentale).

http://perso.orange.fr/nvogel/Dossiers/Logarithme%20n%E9p%E9rien/HistoireLn.htm

3 Relation fondamentale.

Théorème.

Pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}_+^2$, $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

Attention. $a>0$ et $b>0$ sinon les logarithmes de *a* et *b* n'existent pas. Par contre, quand $a<0$ et $b<0$, $\ln(ab)$ existe.

Démonstration.

Soit une constante quelconque $a>0$ et $x>0$, on considère la fonction *F* définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $F(x)=\ln(ax)$.

Montrons que *F* est une primitive de la fonction inverse.

La formule des fonctions composées, $(f(u))'=u'\times f'(u)$, donne $\ln(u)=\frac{u'}{u}$ donc

$$F'(x)=\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}$$

$F(1)=\ln(a)$ donc *F* est l'unique primitive de la fonction inverse vérifiant $F(1)=\ln(a)$

La fonction *G* définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $G(x)=\ln(a)+\ln(x)$ est aussi l'unique primitive de la fonction inverse vérifiant $G(1)=\ln(a)$ donc $F=G$.

III Premières propriétés algébriques.

On travaille sur les réels strictement positifs et on se sert de la relation fondamentale :

pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}_+^2,\ \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

1 $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$.

$$0=\ln 1=\ln\left(a\frac{1}{a}\right)=\ln a+\ln\frac{1}{a} \Rightarrow \ln\frac{1}{a}=-\ln a.$$

2 Pour tout $n\in\mathbb{Z}, \ln a^n=n\ \ln a$

Démonstration par récurrence pour $n\in\mathbb{N}$. .

Soit P_n la proposition : $\ln a^n=n\ \ln a$

Initialisation. $\ln a^0=\ln 1=0=0\ \ln a$ donc P_0 est vraie.

Hérédité. On suppose P_n vraie.

D'après la relation fondamentale $\ln a^{n+1}=\ln a+\ln a^n$

On applique P_n $\ln a^{n+1}=\ln a+n\ \ln a=(n+1)\ln a$ donc P_{n+1} est vraie

Conclusion. P_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Démonstration pour n entier strictement négatif.

On applique la relation $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$.

$-n\in\mathbb{N}$, donc $\ln a^n=\ln\frac{1}{a^{-n}}=-\ln a^{-n}=n\ \ln a$

IV Etude de la fonction ln.

1 Limite en plus l'infini.

Démontrons que ln n'est pas majorée.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\ln 1=0$ donc $\ln 2=r>0$.

La suite (u_n) définie par $u_n=\ln 2^n=n\ln 2=nr$ est une suite arithmétique de raison $r>0$ donc sa limite en $+\infty$ est plus $+\infty$ et elle n'est pas majorée donc ln n'est pas majorée.

La fonction ln est croissante (II 1) et non majorée donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$$

2 **Limite en 0 par valeurs supérieurs.**

On effectue le changement de variable, $y=\dfrac{1}{x}$, $x>0$ donc $x\rightarrow 0 \Rightarrow y\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x\rightarrow 0} \ln x = \lim_{y\rightarrow +\infty} \ln\frac{1}{y} = \lim_{y\rightarrow +\infty} -\ln y = -\infty$$

Conséquence directe. L'axe des ordonnées est une asymptote verticale en 0.

3 Une valeur remarquable.

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$ et l'ensemble image est $\mathbb{R}$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, tout réel admet un unique antécédent dans $]0\ ;+\infty[$
En particulier 1 admet un antécédent qu'on notera *e*.

$$\ln e = 1$$

Remarque importante.
ln admet donc une application réciproque de $\mathbb{R}$ dans $]0\ ;+\infty[$ (ln est injective et c'est une bijection de $]0\ ;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$). Cette application réciproque est l'exponentielle.

4 Variations de ln.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)=\frac{1}{x}$		$+$		$+$		$+$	
ln	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5 Limites remarquables.

Théorème.

$$\lim_{x\rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\rightarrow 0} x\ln x = 0$$

Comparaison de la fonction *f* définie par $f(x)=x$ et de la fonction ln.

Soit *g* définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $g(t)=\ln(t)-t$, $g'(t)=\dfrac{1}{t}-1 \leqslant 0$ sur $[1\ ;+\infty[$
$g(1)=-1$ donc pour tout $t\in[1\ ;+\infty[$, $\ln(t)<t$. En particulier pour $x\geqslant 1$, $\ln\sqrt{x}<\sqrt{x}$

Encadrement de $\dfrac{\ln x}{x}$

Pour $x \geqslant 1$, $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} < 1 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{2\ \ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Pour $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$ et $\dfrac{\ln x}{x} \geqslant 0$

Donc pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, on applique le théorème des gendarmes :

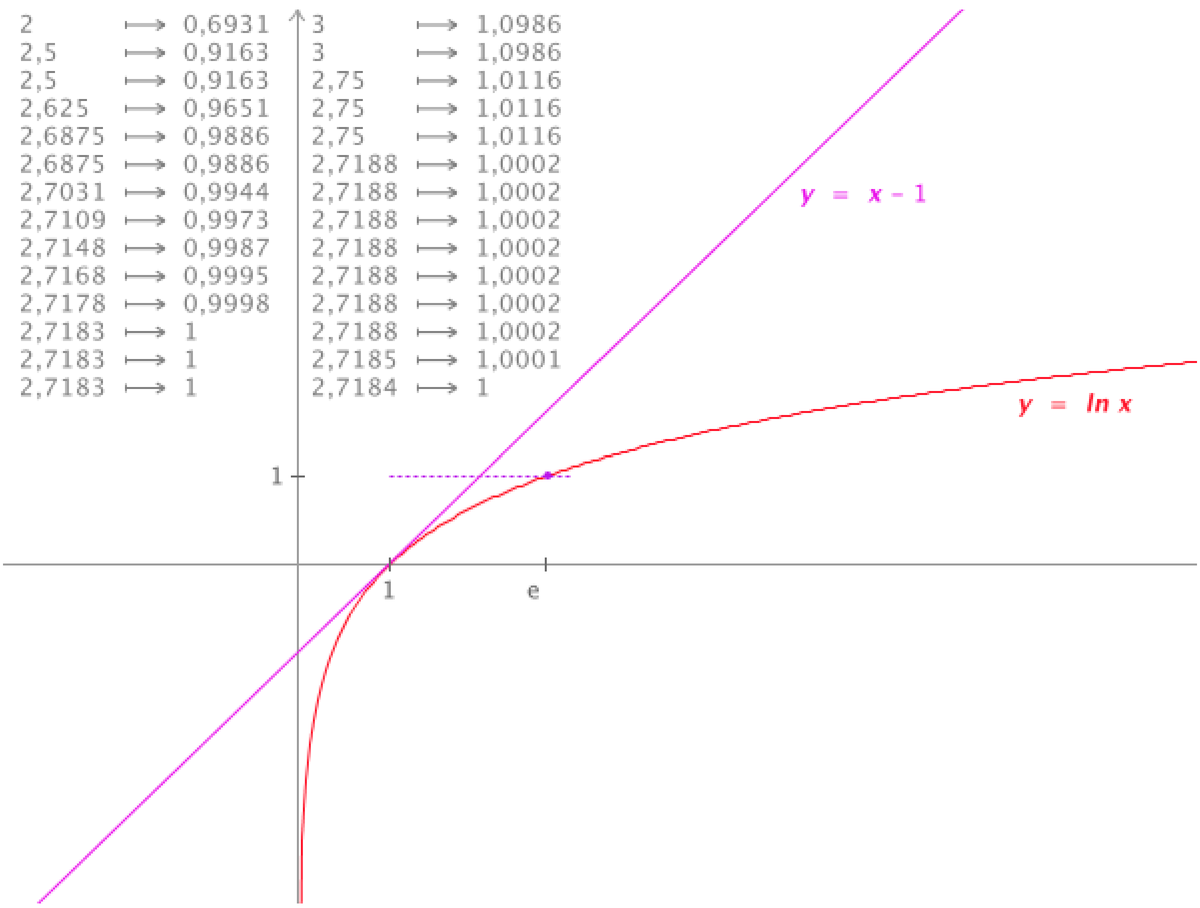
$$0 \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Conséquence. $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$

On effectue le changement de variable, $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ donc $x \to 0 \Rightarrow y \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\ln y}{y} = 0$$

6 Courbe représentative et valeur approchée de e.



V Propriétés algébriques de ln.

1 Existence, signe et valeurs remarquables.

$$\ln a \quad \text{existe si} \quad a > 0$$
$$\ln 1 = 0 \quad \text{et} \quad \ln e = 1$$
$$\text{Si} \quad 0 < x < 1 \quad \text{alors} \quad \ln x < 0. \quad \text{Si} \quad x > 1 \quad \text{alors} \quad \ln x > 0.$$

2 Ordre et égalités.

La fonction ln est strictement croissante donc $0 < a < b \Rightarrow \ln a < \ln b$

Si $a > 0$ et $b > 0$ alors $\ln a > \ln b \Rightarrow a > b.$

La fonction ln est une bijection de $]0 ;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$ et $b > 0$ alors $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b.$

Attention aux inéquations et inégalités.

Exemple : $0{,}5^n < 10^{-5} \Rightarrow \ln 0{,}5^n < \ln 10^{-5} \Rightarrow n \ln 0{,}5 < -5 \ln 10$

$\ln 0{,}5 < 0 \Rightarrow n > -5 \dfrac{\ln 10}{\ln 0{,}5}$

3 Opérations.

$$\text{Pour tout} \quad a > 0,\ b > 0,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\text{Pour tout} \quad a > 0,\ b > 0,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\text{Pour tout} \quad a > 0,\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\text{Pour tout} \quad a > 0,\ n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n \ln a$$

Cette dernière relation nous permet de généraliser les puissances d'un nombre strictement positif, a, en prenant n dans $\mathbb{Q}$ puis dans $\mathbb{R}$ en posant :

a^x est l'unique antécédent par ln de $b = x \ln a$.

Pour $a > 0$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, donc $\ln\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right) = \ln a \Rightarrow n \ln\left(\sqrt[n]{a}\right) = \ln a \Rightarrow \ln\left(\sqrt[n]{a}\right) = \dfrac{\ln a}{n}$.

Comme pour $a > 0$, $\ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{\ln a}{n}$ on pourra écrire $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Cette nouvelle écriture est très intéressante quand on dérive car la formule de dérivation est identique à celle d'une puissance entière.

$$\text{Pour tout} \quad a>0,\ n\in\mathbb{N}^*,\ \ln\sqrt[n]{a}=\frac{\ln a}{n}$$

Avec le nombre *e*.

$$\text{Pour tout} \quad n\in\mathbb{Z},\ \ln(e^n)=n$$

$$\text{Pour tout} \quad n\in\mathbb{N}^*,\ \ln\sqrt[n]{e}=\frac{1}{n}$$

4 Résolution d'équations est d'inéquations.

$$\text{Si } x>0 \text{ , } \ln x=a \iff x=e^a$$