Cours informel sur la fonction réciproque.

Ce cours aborde de nombreuses parties du programme de terminale scientifique. Les parties qui n'appartiennent pas au programme seront signalées par le sigle $\mathscr{HP}$, hors programme.

I Existence d'une fonction réciproque.

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires affirme que si une fonction *f* est
_ continue sur [*a* ; *b*]
_ strictement monotone sur [*a* ; *b*]
_ si *m* appartient à $[f(a);f(b)]$
alors *m* admet un antécédent unique α sur [*a* ; *b*].

Autrement dit, si *f* est continue et strictement monotone sur [*a* ; *b*] on peut définir une fonction réciproque f^{-1} sur $[f(a);f(b)]$ par f^{-1} : $m\rightarrow\alpha$
C'est bien une fonction car l'image est unique.

On peut remplacer dans le théorème une borne fermé par une borne ouverte à condition de remplacer l'image par la limite (voir les exemples).

II Exemples de fonctions réciproques.

1_ *La fonction racine carrée.*

La fonction carré est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
$f(0)=0$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$
La fonction carré admet une fonction réciproque sur $[0;+\infty[$, la fonction racine carrée.

2_ *La fonction exponentielle.*

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
$\lim\limits_{0} \ln=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln=+\infty$
La fonction logarithme népérien admet une fonction réciproque sur $]-\infty;+\infty[$, la fonction exponentielle.

3_ *La fonction arctangente.*

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
$\lim\limits_{\frac{-\pi}{2}} \tan=-\infty$ et $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \tan=+\infty$
La fonction tangente admet une fonction réciproque de $]-\infty;+\infty[$ dans $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction grand arctangente notée Atan.

Remarque.
La fonction tangente est strictement monotone sur tout intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right]$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$. On peut définir d'autres fonctions réciproques de tangente. On les note atan.

4_ La fonction racine n[ième].

La fonction puissance *n* est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
$f(0)=0$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$
La fonction puissance *n* admet une fonction réciproque sur $[0\,;+\infty[$, la fonction racine n[ième].

Cette fonction est définie par :

$$f(0)=0 \text{ et } f(x)=x^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{\ln x}{n}}$$

5_ La fonction arcosinus. $\mathscr{HP}$

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$.
$\cos 0=1$ et $\cos\pi=1$.
La fonction cosinus admet une fonction réciproque de $]-1\,;1[$ dans $[0\,;\pi]$, la fonction grand arcosinus notée Acos.

Remarque.
La fonction cosinus est strictement monotone sur tout intervalle $[k\pi\,;(k+1)\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$. On peut définir d'autres fonctions réciproques de cosinus. On les note acos.

6_ La fonction arcsinus. $\mathscr{HP}$

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

$\sin-\frac{\pi}{2}=-1$ et $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

La fonction sinus admet une fonction réciproque de $[-1\,;1]$ dans $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction grand arcsinus notée Asin.

Remarque.
La fonction sinus est strictement monotone sur tout intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.
On peut définir d'autres fonctions réciproques de sinus. On les note asin.

III Propriétés fondamentales.

Sur un intervalle bien choisi (pour que les fonctions soient définies) :

$$f^{-1}\circ f(x)=x \text{ et } f\circ f^{-1}(x)=x$$

On peut l'écrire aussi :

$$f^{-1}(f(x))=x \text{ et } f\left(f^{-1}(x)\right)=x$$

La fonction réciproque de la fonction réciproque est la fonction.

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$$

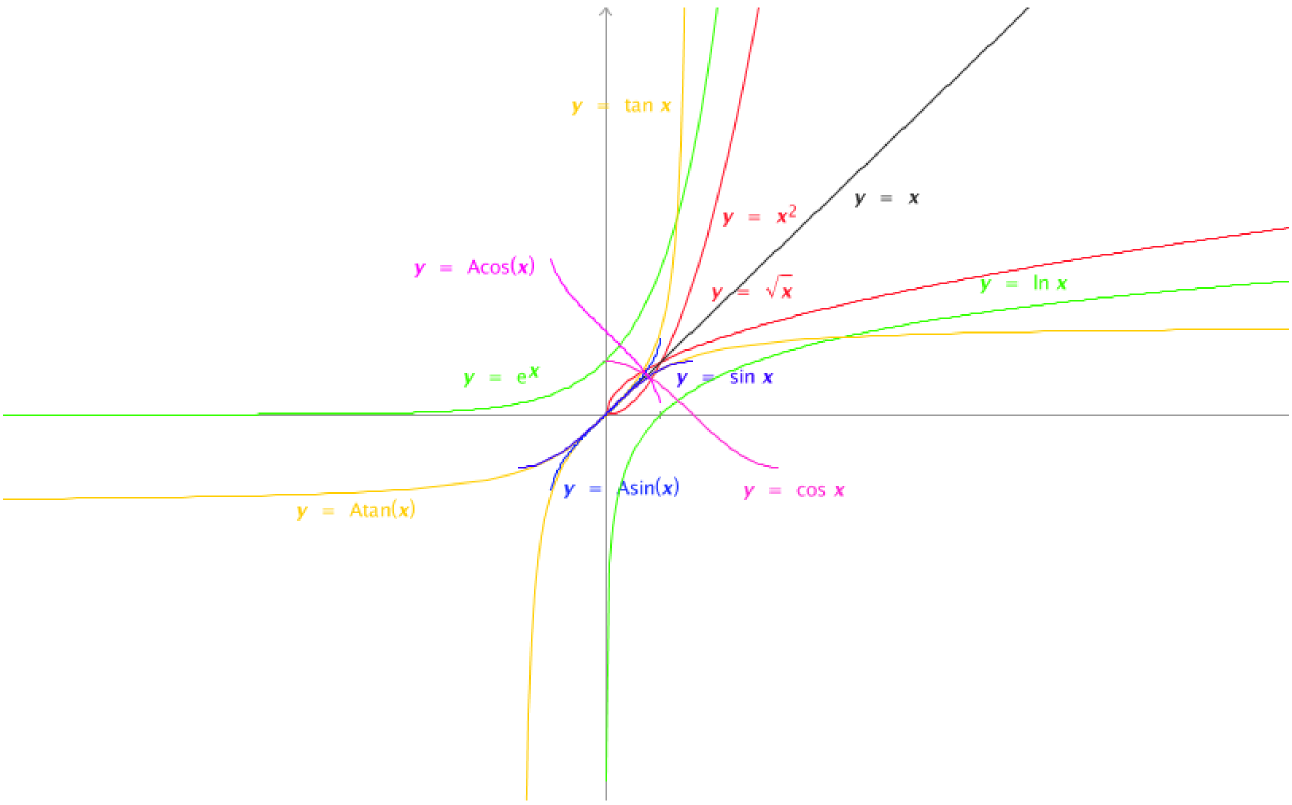
IV Propriétés graphiques.

Sur des intervalles bien choisis (pour que les fonctions soient définies).

Soit $M(x\,;f(x))$ un point de la courbe $\mathscr{C}$ de *f* alors le point $M'(f(x);x)$ appartient à la courbe $\mathscr{D}$ de f^{-1}.
En effet $(f(x);x)=\left(f(x);f^{-1}(f(x))\right)$

Dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$, bissectrice du premier quadrant.

Sur ce graphique on remarque bien la symétrie axiale.



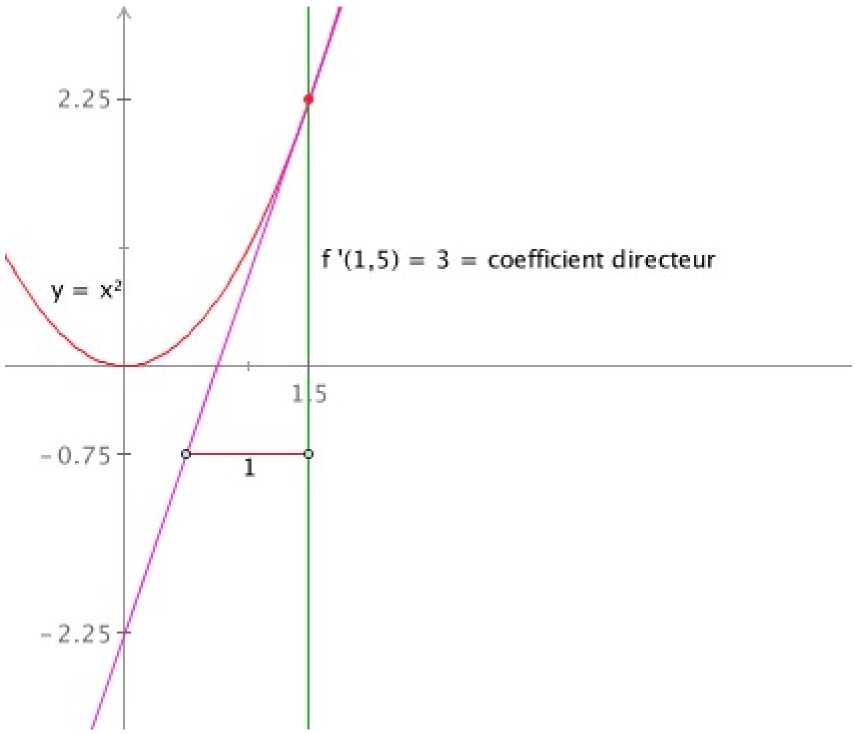
Ce graphique est fait avec Edugraphe. Mais ce programme a un bogue, il ne trace pas les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. Donc j'ai rusé, j'ai construit Acos, Asin et Atan avec la méthode d'Euler.

V Continuité.

Graphiquement, une fonction *f* est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ si on peut tracer sa courbe $\mathscr{C}$ « sans lever le crayon » . Toutes les fonctions étudiez sont continues donc par symétrie les fonctions réciproques sont continues.

VI Dérivabilité. Définition graphique.

Par définition, le nombre dérivé en *a*, quand il existe, est le coefficient directeur de la tangente. Autrement dit, une fonction *f* est dérivable en *a*, si et seulement si sa courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente non verticale au point $A(a\,;f(a))$

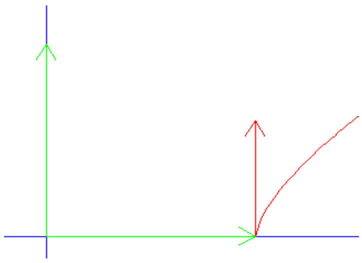


Remarques.

_ Si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est infinie la fonction n'est pas dérivable en *a* mais la courbe admet une tangente verticale au point $A(a\,;\,f(a))$.

Exemple. La fonction racine carrée en 0^+, $x\geqslant 0$, n'est pas dérivable en 0^+, $x\geqslant 0$, mais sa courbe admet une demi-tangente verticale.

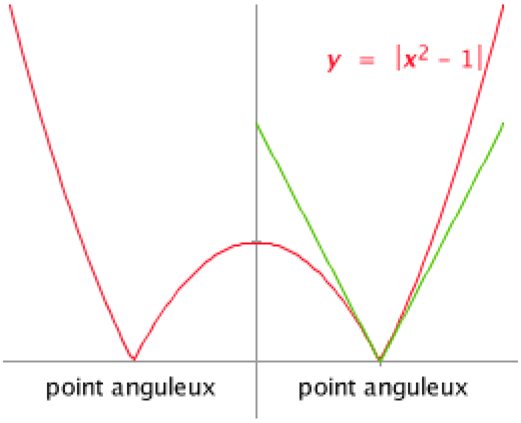
Sur le graphique, la courbe de la fonction *f* définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x-1}$ et la demi-tangente verticale au point $I(1\,;0)$.



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{1+h-1}-\sqrt{1-1}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$ donc *f* n'est pas dérivable en 0.

_ Si $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = m \in \mathbb{R}$ et $m \neq l$
alors la fonction n'est pas dérivable en a mais la courbe admet deux demi-tangentes, de coefficient directeur l à droite et de coefficient directeur m à gauche, au point $A(a\,;\,f(a))$. On dit que le point est anguleux.

Exemple. La fonction valeur absolu en 0, $f : x \to |x|$ ou sur le graphique la fonction $x \to |x^2 - 1|$ et ses deux demi-tangentes.

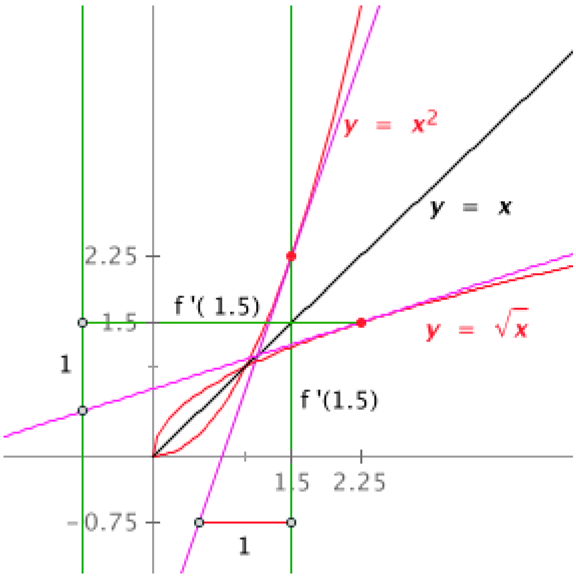


Sur $[1\,;+\infty[$, $f(x) = |x^2-1| = x^2-1$, f est dérivable et donc le nombre dérivé à droite de f en 1 est $f'_d(1) = 2$.
Sur $[-1\,;1]$, $f(x) = |x^2-1| = -x^2+1$, f est dérivable et donc le nombre dérivé à gauche de f en 1 est $f'_g(1) = -2$.

Soit une droite d de coefficient directeur p non nul.
La droite d' symétrique de d par rapport à l'axe δ d'équation $y = x$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{p}$.
Cas particulier. Le symétrique d'une droite horizontale est une droite verticale et réciproquement.

On peut conclure que :
_ si f est dérivable en a et a pour nombre dérivé $p = f'(a) \neq 0$ alors la fonction réciproque est dérivable en $f(a)$ et a pour nombre dérivé $\frac{1}{p} = (f^{-1})'(f(a))$.
_ si f est dérivable en a et a pour nombre dérivé $0 = f'(a)$ alors la fonction réciproque n'est pas dérivable en $f(a)$
_ si f n'est pas dérivable en a mais si sa courbe admet une tangente verticale alors la fonction réciproque est dérivable en $f(a)$ et a pour nombre dérivé $0 = (f^{-1})'(f(a))$.

On voit sur ce graphique les deux courbes symétriques, les deux tangentes symétriques et les deux triangles de côté 1 et $f'(1{,}5)$ symétriques.



$f'(1{,}5)$ est le coefficient directeur de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse 1,5 donc le nombre dérivée de f définie par $f(x) = x^2$.

Le coefficient directeur de la tangente à la parabole d'équation $y = \sqrt{(x)}$ au point d'abscisse $2{,}25 = f(1{,}5)$ est égal à $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{f'(1{,}5)}$
Donc le nombre dérivée de f^{-1} en $2{,}25 = f(1{,}5)$ est $\frac{1}{f'(1{,}5)}$

VI Dérivabilité. Définition analytique.

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle *I* telle que $f'(x)\neq 0$ sur *I* et sa fonction réciproque dérivable sur $f(I)$.

$f^{-1}(f(x))=x$ Modèle $(g(u(x)))'=u'(x)g'(u(x))$

$\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'$

$f'(x)\times\left(f^{-1}\right)'(f(x))=1$

On pose $a=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(a)$

f' ne s'annule pas donc $\boxed{f^{-1}{}'(a)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}}$

VII Exemples de fonctions dérivés.

1_ *La fonction racine carrée.*

f est la fonction carrée, sa dérivée est la fonction double, $f'(truc)=2\,truc$

$$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

2_ *La fonction exponentielle.*

f est la fonction logarithme, sa dérivée est la fonction inverse, $f'(truc)=\dfrac{1}{truc}$

$$\boxed{(e^x)'=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x}$$

3_ *La fonction arctangente. HP*

f est la fonction tangente, sa dérivée est la fonction $f'(truc)=1+(\tan(truc))^2$

$$\boxed{(Atan(x))'=\frac{1}{1+\left(\tan(Atan(x))\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}}$$

4_ *La fonction racine n^ième^.*

f est la fonction puissance *n*, sa dérivée est la fonction *n* fois puissance $n-1$
$f'(truc)=n\,truc^{n-1}$

$$\boxed{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n\,x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}$$

On retrouve le modèle classique $\boxed{(x^m)'=m\,x^{m-1}}$

5_ La fonction arcosinus. HP

f est la fonction cosinus, sa dérivée est la fonction moins sinus et on sait que ces fonctions vérifient la propriété $\sin^2(y)+\cos^2(y)=1$ et on travaille sur $[0;\pi]$ donc le sinus est positif et $\sin(y)=\sqrt{1-\cos^2(y)}$ et $f'(truc)=-\sin(truc)=-\sqrt{1-(\cos(truc))^2}$

$$\boxed{(Acos(x))'=\frac{1}{-\sin(Acos(x))}=\frac{-1}{\sqrt{1-(\cos(Acos(x)))^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

6_ La fonction arcsinus. HP

f est la fonction sinus, sa dérivée est la fonction cosinus et on sait que ces fonctions vérifient la propriété $\sin^2(y)+\cos^2(y)=1$ et on travaille sur $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ donc le cosinus est positif et $\cos(y)=\sqrt{1-\sin^2(y)}$. $f'(truc)=\cos(truc)=\sqrt{1-(\sin(truc))^2}$

$$\boxed{(Asin(x))'=\frac{1}{\cos(Asin(x))}=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin(Asin(x)))^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$