Raisonnement par récurrence.

On l'applique à une propriété qui est exprimée en fonction d'un entier n. On la note $P(n)$. La propriété est définie à partir de $n=0$ ou $n=1$ ou ...

Exemple de propriété.

n point distincts non alignés 3 à 3 définissent $\frac{n(n-1)}{2}$ droites distinctes.

Comment ça fonctionne.

On initialise la récurrence en vérifiant, selon les cas ou les notations, que $P(0)$ ou $P(1)$ ou ... est vraie.

On démontre que la propriété est héréditaire : $P(n)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vraie.

On conclue : pour tout $n \in \mathbb{N}$, (ou $n \in \mathbb{N}^*$) ou ... la propriété $P(n)$ est vraie.

Pourquoi ça fonctionne.

$P(0)$ est vraie, la propriété est héréditaire donc $P(1)$ est vraie ;
$P(1)$ est vraie, la propriété est héréditaire donc $P(2)$ est vraie ;
$P(2)$ est vraie, la propriété est héréditaire donc $P(3)$ est vraie etc.

Exemple 1

Soit $P(n)$ la propriété : n point distincts non alignés 3 à 3 définissent $\frac{n(n-1)}{2}$ droites distinctes.

Initialisation de la récurrence.

Par deux points distincts passe une droite et une seule donc $P(2)$ vraie.

Démonstration de l'hérédité.

On suppose que $P(n)$ est vraie.

Soit n+1 points distincts non alignés 3 à 3 $A_{1,}\ A_{2,}\ \dots,A_{n+1}$ on choisit les n premiers $A_{1,}\ A_{2,}\ \dots,A_n$. D'après $P(n)$ ces n points définissent $\frac{n(n-1)}{2}$ droites distinctes.

Comptons les droites qui passent par A_{n+1}, ces droites sont distinctes des premières car les points ne sont pas alignés 3 par 3, il y en a n.

En tout il y a $\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n^2-n+2\text{n}}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et supérieur à 2 $P(n)$ est vraie.

Exemple 2. Tous les élèves de TS sont des filles.

Soit $P(n)$ la propriété : si dans un ensemble de n personnes il y a une fille alors toutes les personnes de l'ensemble sont des filles.

Initialisation de la récurrence.

$P(1)$ est vraie.

Démonstration de l'hérédité.

On suppose que $P(n)$ est vraie.

Soit n+1 personnes dont une est une fille, on choisit la fille et n – 1 autres personnes, ensemble E.

Il reste une personne qu'on appellera Claude.

D'après $P(n)$ les n personnes de E sont des filles.

On choisit maintenant Claude et n-1 filles de E, d'après $P(n)$ les n personnes sont des filles donc Claude est une fille et les n+1 personnes sont des filles. $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.

S'il y a une fille dans un ensemble de n personnes toutes ces personnes sont des filles.

En TS il y a une fille donc tous les élèves de TS sont des filles. Où est la faille ?