Similitude et transformation complexe associée

I Similitude directe.

1 Rappel.

On a vu que :

une similitude directe est caractérisée par son rapport $\frac{M'N'}{MN}=k$ et son angle $(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{M'N'})=\theta+2\ k\pi$,

si quatre points M, N, M' et N' vérifient $M\neq N$ et $M'\neq N'$ alors il existe une unique similitude directe qui transforme *M* en *M'* et *N* en *N'*, cette similitude directe vérifie $\frac{M'N'}{MN}=k$ et $(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{M'N'})=\theta+2\ k\pi$

si *ABC* et *A'B'C'* sont semblables (*A* correspondant à *A'*, *B* à *B'* et *C* à *C'*) alors il existe une unique similitude (directe ou indirecte) qui transforme *A* en *A'*, *B* en *B'* et *C* en *C'* ,

l'image d'un triangle par une similitude est un triangle semblable.

2 Transformation complexe associée.

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(0\ ;\vec{u}\ ;\vec{v})$.

Soit une similitude directe de rapport rapport *k* et d'angle θ, un point *A* d'affixe z_A et son image *A'* d'affixe $z_{A'}$. Pour tout point *M* du plan d'affixe z et son image *M'* d'affixe z' :

$$\frac{A'M'}{AM}=k \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{A'M'})=\theta+2\ k\pi, \quad \text{donc} \quad \frac{z'-z_{A'}}{z-z_A}=k\,e^{i\theta}$$

$$z'=k\,e^{i\theta}(z-z_A)+z_{A'} \quad \text{ou encore} \quad z'=az+b \quad \text{avec} \quad a=k\,e^{i\theta} \quad \text{et} \quad b=k\,e^{i\theta}z_A+z_{A'}$$

Soit une fonction complexe définie par : $z'=az+b\,,a\neq 0$.

Cette fonction est définie sur tout $\mathbb{C}$.

$z'=az+b\,,a\neq 0$ donc $z=\frac{1}{a}z'-\frac{b}{a}$ et *z* admet un antécédent unique, cette fonction est donc une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. (Sa fonction réciproque est définie par : $z'=\frac{1}{a}z-\frac{b}{a}$)

La fonction *f* du plan dans le plan définie par , $f\ :\ M(z)\rightarrow M'(z')$, est une transformation du plan.

Pour tous points distincts *M* et *N* d'affixes respectives *m* et *n* :

$$\frac{m'n'}{mn}=\frac{am+b-(an+b)}{m-n}=\frac{a(m-n)}{m-n}=a=k\,e^{i\theta}$$

Si M' le point d'affixe m' et N' celui d'affixe n' alors $\frac{M'N'}{MN}=\left|\frac{m'n'}{mn}\right|=k$ et f est une similitude.

D'autre part pour tous points distincts M et N, $(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{M'N'})=arg\left(\frac{m'n'}{mn}\right)=\theta+2\ k\pi$.

Si $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD})=\alpha$ alors :

$$(\overrightarrow{A'B'}\ ;\ \overrightarrow{C'D'})=(\overrightarrow{A'B'}\ ;\ \overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{C'D'})=-\theta+\alpha+\theta=\alpha$$

f conserve les angles orientés donc c'est une similitude directe.

Théorème 1.

f est une similitude directe, $f\ :\ M(z)\to M'(z')$, si et seulement si sa fonction complexe associée est de la forme, $z'=az+b\,,a\neq 0$.

Conséquence.

i. $|a|=k$ est le rapport de similitude et $arg(a)=\theta$ est son angle.

ii. La transformation réciproque de f est la similitude f^{-1} dont la transformation complexe associée est, $z'=\frac{1}{a}z-\frac{1}{b}$. Son rapport est $\left|\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{k}$ et un angle $arg\left(\frac{1}{a}\right)=-\theta$

iii. La composée de deux similitudes directes est une similitude directe de rapport le produit des rapports et dont un angle est la somme des angles.

Démonstration.

i. et *ii.* ont été démontrés ci-dessus.

iii. Considérons f_1 telle que $z_1=k_1\,e^{i\theta_1}z+b_1$ et f_2 telle que $z_2=k_2\,e^{i\theta_2}z+b_2$, $f_2\circ f_1$ a pour transformation complexe associée :

$$z\ \to\ k_1\,e^{i\theta_1}z+b_1\ \to\ k_2\,e^{i\theta_2}\left(k_1\,e^{i\theta_1 z}+b_1\right)+b_2=z'$$

$$z'=k_2\,k_1\ e^{i\theta_2}e^{i\theta_1}z+k_2\,e^{i\theta_2}b_1+b_2=k_2\,k_1\ e^{i(\theta_2+\theta_1)}+b_3 \quad \text{avec} \quad b_3=k_2\,e^{i\theta_2}b_1+b_2$$

Donc $f_2\circ f_1$ est une similitude directe de rapport $k_1\,k_2$ et dont un angle est $\theta_1+\theta_2$.

II Similitude indirecte.

Théorème 2.

f est une similitude indirecte, $f\ :\ M(z)\to M'(z')$, si et seulement si sa fonction complexe associée est de la forme, $z'=a\,\overline{z}+b\,,a\neq 0$.

Démonstration.

f transforme le triangle ABC en $A'B'C'$ semblable indirect. La réflexion d'axe $(0\ ;\ \vec{u})$, $r\ :\ M(z)\ \to\ M_1(\overline{z})$ transforme le triangle ABC en $A_1\,B_1\,C_1$ semblable indirect.
$A_1\,B_1\,C_1$ et $A'B'C'$ sont semblables directs donc il existe une unique similitude directe g qui transforme $A_1\,B_1\,C_1$ et $A'B'C'$, sa transformation complexe associée est de la forme $z'=az+b\,,a\neq 0$.

$f = g \circ r$ et sa transformation complexe associée est de la forme $z' = a\overline{z} + b,\ a \neq 0$.

Réciproquement, $z' = a\overline{z} + b,\ a \neq 0$.
$z \rightarrow \overline{z}$ correspond à une réflexion donc une isométrie indirecte.
$z \rightarrow az + b,\ a \neq 0$ correspond à une similitude directe.
La composée $z' = az + b,\ a \neq 0$ correspond à une similitude indirecte.