Volume d'un solide de révolution.

I Définition

Un solide de révolution est engendré par la rotation d'un domaine plan autour d'un axe.

II Théorème admis

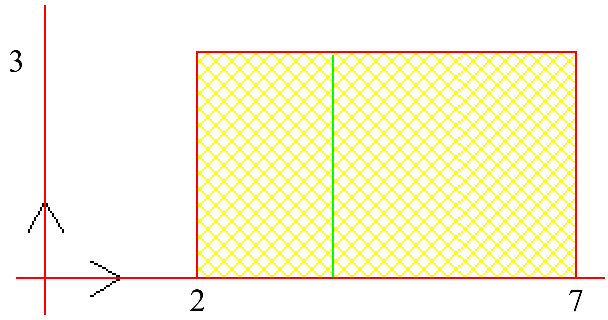
Le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe $(O\,;\vec{i}\,)$ du domaine plan limité par la courbe de la fonction f, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, $a<b$, et l'axe $(O\,;\vec{i}\,)$ est $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

L'unité est l'unité de volume qui est égale au volume du parallélépipède de « côtés » $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

III Exemples

1 Le cylindre est engendré par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés.

(Ça c'est Déclic)



Le rectangle jaune engendre un cylindre quand il effectue une rotation autour de l'axe $(O\,;\vec{i}\,)$
Soit f la fonction définie par $f(x)=3$ sur l'intervalle [2 ; 7]. L'aire sous la courbe de cette fonction est le rectangle jaune et est égale à : $\int_2^7 f(x)\,dx$

Le segment vert engendre un cercle par cette rotation, son aire est $\pi f^2(x)=\pi(f(x))^2$
Pour calculer le volume du cylindre on intègre cette aire sur l'intervalle [2 ; 7] :

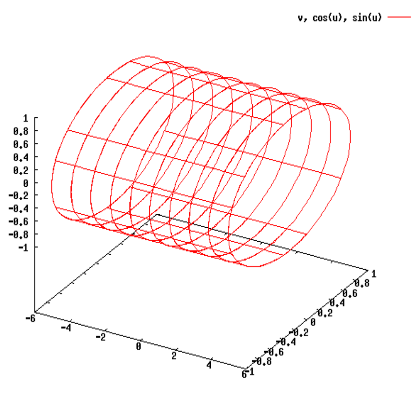
$$V=\int_2^7 \pi f^2(x)dx=\pi\int_2^7 f^2(x)dx=\pi\int_2^7 9\,dx=\pi[9\mathrm{x}]_2^7=45\pi$$

Vérifions avec la formule $V=B\,h$ où B est l'aire de la base et h la hauteur.

$$B\,h=\pi r^2 h=3^2\times 5\,\pi=45\,\pi$$

Le cylindre ci-contre est engendré par un rectangle de hauteur 1 et de longueur 12. Soit f la fonction définie par $f(x)=1$ sur l'intervalle [-6 ; 6]. Le volume de ce cylindre est :

$$V=\pi\int_{-6}^{6} f^2(x)\,dx=\pi\int_{-6}^{6} 1\,dx=\pi[x]_{-6}^{6}=12\pi$$

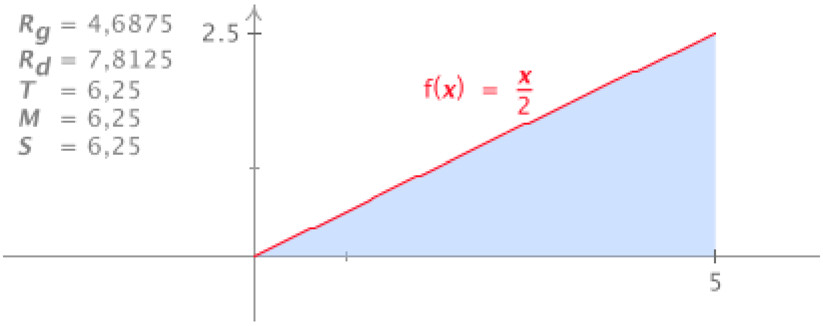


(C'est mon premier essai avec GnuPlot, libre et « open source ». Je ferai mieux la prochaine fois)

Pour information et hors programme. La formule que l'on voit est le système d'équations paramétriques de ce cylindre $\begin{cases} -6 \leqslant v \leqslant 6\,,\ x = v \\ -\pi \leqslant u \leqslant \pi \begin{cases} y = \cos u \\ z = \sin u \end{cases} \end{cases}$

2 Le cône droit est engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

Légende. L'aire approchée calculée par la méthode des rectangles, R_g et R_d, par la méthode des trapèzes, par celle du point médian et l'aire exacte.
(Ça c'est Edugraphe)



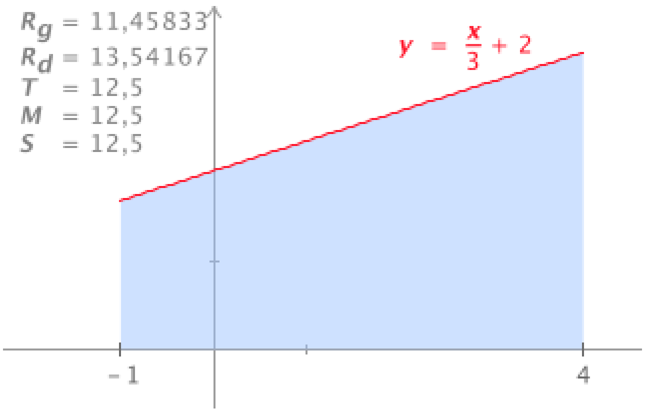
Le volume du cône est l'intégrale de πf^2 sur l'intervalle [0 ; 5] :

$$V = \pi \int_0^5 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^5 \frac{1}{4} x^2\,dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = 125\frac{\pi}{12}$$

Vérifions avec la formule $V = \frac{1}{3} B h$ où B est l'aire de la base et h la hauteur.

$$\frac{1}{3} B h = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 5 = 125\frac{\pi}{12}$$

3 Le cône droit tronqué est engendré par la rotation d'un trapèze rectangle autour du côté de perpendiculaire aux bases.



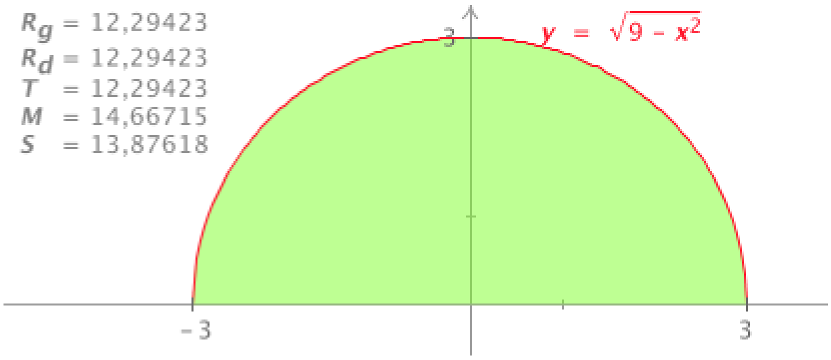
Le volume du cône tronqué est l'intégrale de πf^2 sur l'intervalle [-1 ; 4] :

$$V = \pi \int_{-1}^4 f^2(x)\,dx = \pi \int_{-1}^4 \left(\frac{1}{3}x + 2\right)^2 dx = \pi\left[\left(\frac{1}{3}x + 2\right)^3\right]_{-1}^4 = 875\frac{\pi}{27}$$

Vérifions avec la formule $V=\frac{h}{3}(B+b+\sqrt{Bb})$ où B est l'aire de la grande base et b est l'aire de la petite base et h la hauteur.

$$\frac{5}{3}\left(\pi\left(\frac{10}{3}\right)^2+\pi\left(\frac{5}{3}\right)^2+\frac{50}{9}\pi\right)=875\frac{\pi}{27}$$

4 La sphère est engendrée par la rotation d'un demi-disque autour du diamètre frontière.

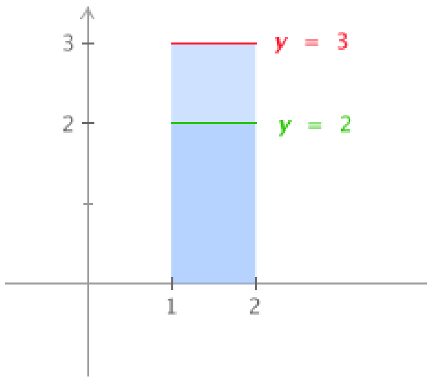


Le volume de la sphère est l'intégrale de πf^2 sur l'intervalle [-3 ; 3] :

$$V=\pi\int_{-3}^{3} f^2(x)\,dx=\pi\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx=\pi\left[\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\right]_{-1}^{4}=36\pi$$

Vérifions avec la formule $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi 3^3=36\pi$

5 Le tore à section carré engendrée par la rotation d'un carré autour d'une droite extérieure au carré, ici l'axe $(0,\vec{i})$



Soit f la fonction $f(x)=3$ définie sur [1 ; 2] et g la fonction $g(x)=2$ définie sur [1 ; 2]

Le volume du tore est la différence du volume du solide de révolution généré par tout le domaine bleu, $V_1=\pi\int_1^2 f^2(x)\,dx$,

et du volume du solide de révolution généré par tout le domaine bleu foncé, $V_2=\pi\int_1^2 g^2(x)\,dx$, donc :

$$V=V_1-V_2=\pi\int_1^3 f^2(x)-g^2(x)\,dx=\pi\int_1^3 5\,dx=\pi[5x]_1^2=5\pi$$

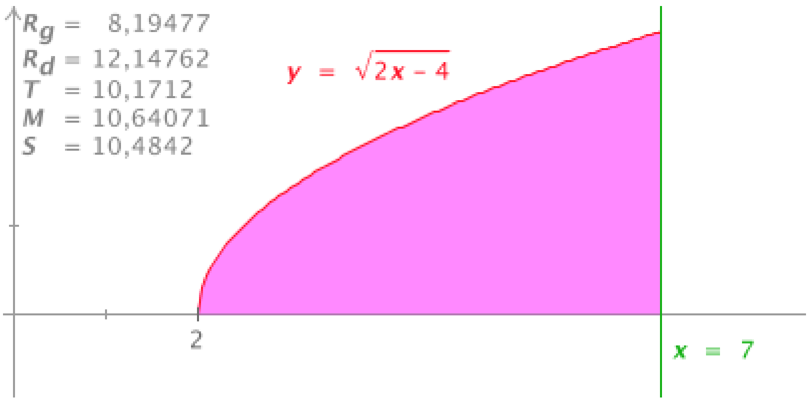
Vérifions avec la formule du volume d'un disque $V_3=\pi r^2 h$

$$V=\pi\times 3^2\times 1-\pi\times 2^2\times 1=5\pi$$

6 Le paraboloïde ellipsoïdale tronqué engendré par la rotation autour de l'axe $(0, \vec{i})$ ***du domaine limité par une demi-parabole d'axe*** $(0, \vec{i})$ ***de sommet S sur l'axe des abscisses, par une droite d'équation*** $x = b$ ***coupant la parabole et par l'axe*** $(0, \vec{i})$

Les courbes d'une fonction et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ donc cette courbe est une demi parabole de sommet $S(2\,;0)$ et d'axe $(0, \vec{i})$

La fonction réciproque est du second degré, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ sur un intervalle bien choisi.



Le volume est $V = \pi \int_2^7 f^2(x)\,dx = \pi \int_2^7 \left(\sqrt{2x+4}\right)^2 dx = \pi \left[\left(x^2 + 4x\right)\right]_2^7 = 65\,\pi$