Transformations du plan et complexes

I Préambule.

Une transformation du plan est une bijection du plan dans lui-même.
Autrement dit, tout point a une image et tout point a un antécédent unique.
Ou encore, une transformation admet une transformation réciproque.

Ici, on se bornera à étudier la translation, l'homothétie et la rotation. Pour les élèves suivant la spécialité on ajoutera la similitude directe (qui conserve l'orientation) qui est la composée d'une rotation et d'une homothétie et la similitude indirecte (qui change l'orientation) qui est la composée d'une rotation, d'une homothétie et d'une réflexion.

Un complexe peut être interprété géométriquement comme l'affixe d'un point donc à toute fonction *f* de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ on peut faire correspondre une fonction *T* du plan dans lui-même définie par :
le point *M* d'affixe *z* a pour image le point $M' = T(M)$ d'affixe $f(z)$.

II Translation

Définition géométrique.
Le translaté, $T(M) = M'$, du point M par la translation *T* de vecteur $\vec{t}$ vérifie :
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{t}$$

Interprétation avec les complexes.
Si le vecteur $\vec{t}$ a pour affixe *t*, *M* a pour affixe *z* et $T(M) = M'$ a pour affixe $f(z) = z'$ alors
$$\boxed{z' = z + t}$$

Reconnaître une translation.

1ère étape.
En général, pour reconnaître une transformation T du plan on commence par chercher les points fixes, c'est à dire les points *M* vérifiant $T(M) = M$.
Une translation n'a pas de point fixe donc l'équation $f(z) = z$ n'a pas de solution.

2ème étape.
S'il n'y a pas de point fixe, on calcule $f(z) - z$ et on vérifie que ce complexe est constant, ne dépend pas du z choisit.

On conclut que la transformation est une translation de vecteur $\vec{t}$ d'affixe $t = f(z) - z$

Exemple.
La transformation du plan *T* est définie par :
Le point *M* d'affixe *z* a pour image le point $T(M) = M'$ d'affixe $z' = z + \dfrac{1}{1 + i\sqrt{3}}$
On cherche si *T* a les points fixes (cette étape est facultative) :
$z = z + \dfrac{1}{1 + i\sqrt{3}} \Rightarrow 0 = \dfrac{1}{1 + i\sqrt{3}}$ Il n'y a pas de solution donc pas de point fixe.

On cherche si $z'-z$ est constant :

$z'-z=\frac{1}{1+i\sqrt{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}$ est une constante donc la transformation est une translation de vecteur $\vec{t}$ d'affixe $t=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}$

Remarque. Avant d'effectuer ces calculs on peut chercher les images de quelques points, *O* l'origine, *I* d'affixe 1, *J* d'affixe *i* pour voir ce qui se passe.

III Homothétie

Définition géométrique.

L'image (homothétique) , $H(M)=M'$, du point M par l'homothétie *H* de centre *A* et de rapport *k*, non nul, vérifie :

$$\overrightarrow{AM'}=k\,\overrightarrow{AM}$$

Interprétation avec les complexes.

Si le point *A* a pour affixe *a*, *M* a pour affixe *z* et $H(M)=M'$ a pour affixe $f(z)=z'$ alors

$$z'-a=k(z-a)$$

$\overrightarrow{AM'}$ a pour affixe $z'-a$ et $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $z-a$ et, pour $z\neq a$, $\frac{z'-a}{z-a}=k\in\mathbb{R}$ donc les points *A*, *M* et *M'* sont alignés et $\frac{AM'}{AM}=|k|$ donc c'est bien une homothétie de centre *A* et de rapport *k*.

Reconnaître une homothétie.

1ère étape.
On recherche les points fixes.
L'équation $f(z)=z$ a une solution unique *a* affixe du centre *A*.

2ème étape.

S'il y a un point fixe unique, on calcule, pour $z\neq a$, $\frac{z'-a}{z-a}$ et on vérifie c'est un réel *k* constant.

On conclut que la transformation est une homothétie de centre *A* et de rapport *k*.

Exemple.

La transformation du plan *H* est définie par :
Le point *M* d'affixe *z* a pour image le point $H(M)=M'$ d'affixe $z'=-2z+2+4i$

On cherche si *T* a les points fixes :

$z=-2z+2+4i \Rightarrow 3z=2+4i \Rightarrow z=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i$ donc il y a un point fixe unique *A* d'affixe $a=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i$

On calcule $\frac{z'-a}{z-a}$ pour $z \neq a$.

$$\frac{z'-a}{z-a}=\frac{-2\ z+2\ +4\ i-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}i}{z-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}i}=\frac{-6\ z+4\ +8\ i}{3\ z-2\ -4\ i}=\frac{-2\ (3\ z-2\ -4\ i)}{3\ z-2\ -4\ i}=-2\in\mathbb{R}.$$

Donc la transformation est une homothétie de centre A et de rapport -2.

IV Rotation

Définition géométrique.

L'image, $R(M)=M'$, du point M par la rotation R de centre A et d'angle α, non nul, vérifie :

$$(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM}')=\alpha+2\ k\ pi \quad \text{et} \quad AM=AM'$$

Interprétation avec les complexes.

Si le point A a pour affixe a, M a pour affixe z et $R(M)=M'$ a pour affixe $f(z)=z'$ alors

$$z'-a=e^{i\alpha}(z-a)$$

$\overrightarrow{AM'}$ a pour affixe $z'-a$ et $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $z-a$ et, pour $z\neq a$, $\frac{z'-a}{z-a}=e^{i\alpha}$

donc $(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM}')=arg\left(\frac{z'-a}{z-a}\right)=\alpha+2\ k\pi$ et $\frac{AM'}{AM}=\left|e^{i\alpha}\right|=1$ donc c'est bien une rotation de centre A et d'angle α.

Reconnaître une rotation.

1ère étape.
On recherche les points fixes.
L'équation $f(z)=z$ a une solution unique a affixe du centre A.

2ème étape.
S'il y a un point fixe unique, on calcule, pour $z\neq a$, $\frac{z'-a}{z-a}$ et on vérifie c'est un complexe de module 1 et d'argument α.

On conclut que la transformation est une rotation de centre A et de d'angle α.

Exemple.

La transformation du plan R est définie par :
Le point M d'affixe z a pour image le point $R(M)=M'$ d'affixe

$$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\ +i)z+\frac{2\ +\sqrt{2}}{2}+\frac{4\ -3\ \sqrt{2}}{2}i$$

On cherche si R a les points fixes :

$$z=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})z+\frac{2\ +\sqrt{2}}{2}+\frac{4\ -3\ \sqrt{2}}{2}i \Rightarrow 2\ z-(\sqrt{2}+i\sqrt{2})z=2\ +\sqrt{2}\ +(4\ -3\ \sqrt{2}\ )i$$

$$(2-\sqrt{2}-i\sqrt{2})z=2+\sqrt{2}+(4-3\sqrt{2})i \Rightarrow z=\frac{2+\sqrt{2}+(4-3\sqrt{2})i}{(2-\sqrt{2}-i\sqrt{2})}$$

$$z=\frac{(2+\sqrt{2}+(4-3\sqrt{2})i)(2-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{8-4\sqrt{2}}$$

$$z=\frac{2+6-4\sqrt{2}+i(2+2\sqrt{2}+8+6-4\sqrt{2}-6\sqrt{2})}{8-4\sqrt{2}}$$

$z=\frac{8-4\sqrt{2}+i(16-8\sqrt{2})}{8-4\sqrt{2}}=1+2i$ donc il y a un point fixe unique A d'affixe $a=1+2i$

On calcule $\frac{z'-a}{z-a}$

$$z'-a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+\frac{2+\sqrt{2}}{2}+\frac{4-3\sqrt{2}}{2}i-1-2i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$z'-a=\frac{\sqrt{2}}{2}((1+i)z+1-3i)$ (1)

$\frac{(z'-a)}{(z-a)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(1+i)z+1-3i}{z-1-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{((1+i)z+1-3i)(\bar{z}-1+i)}{|z-1-i|^2}$ ce calcul est très compliqué est on est vraiment mal parti. Essayons de ruser.

On sait qu'on doit trouver la relation $z'-a=e^{i\alpha}(z-a)$ c'est à dire dans ce cas particulier :

$z'-(1+2i)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z-(1+2i))$ (2)

En comparant (1) et (2) on voit qu'il suffit de montrer que $(1+i)(1+2i)=-1+3i$

$(1+i)(1+2i)=1+2i^2+i(1+2)=-1+3i$ donc la relation (1) peut s'écrire :

$z'-a=\frac{\sqrt{2}}{2}((1+i)z-(1+i)(1+2i))=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z-(1+2i))$ et $\frac{z'-a}{z-a}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$\frac{z'-a}{z-a}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc la transformation est une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

V La bonne méthode de calcul.

Reprenons l'exemple de la rotation.
Il y a un point fixe unique A d'affixe $a=1+2i$ donc :

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)a+\frac{2+\sqrt{2}}{2}+\frac{4-3\sqrt{2}}{2}i$$

$$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+\frac{2+\sqrt{2}}{2}+\frac{4-3\sqrt{2}}{2}i$$

En effectuant la différence on obtient :

$$z'-a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z-a)$$

$$z'-a=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-a)$$

VI Cas général.

Fonction complexe associée a une transformation du plan s'écrivant sous la forme :

$$f(z)=z'=az+b$$

Premier cas : $a=1$.

Si $b=0$ alors la fonction s'écrit $f(z)=z$ et tous les points du plans sont fixes.
C'est l'identité *Id* du plan. $Id(M)=M$

Si $b\neq 0$ alors alors la fonction s'écrit $f(z)=z+b$ et il n'y a pas de points fixes.
L'équation $f(z)=z$ donne $z=z+b$ puis $0=b$ comme $b\neq 0$ il n'y a pas de solution.
C'est une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b.

Deuxième cas : $a\neq 1$.

Recherche du point fixe.

L'équation $f(z)=z$ donne $z=az+b$ puis $z=\dfrac{b}{a-1}$

Il y a un unique point fixe Ω d'affixe $\omega=\dfrac{b}{1-a}$ et c'est (une similitude directe pour les spés) une rotation ou une homothétie de centre Ω

Recherche des caractéristiques (rapport, angle).

Calcul de $\dfrac{f(z)-\omega}{z-\omega}$.

Ω est un point fixe donc $f(\omega)=\omega$ et $\omega=a\omega+b$

$\dfrac{f(z)-\omega}{z-\omega}=\dfrac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}=\dfrac{az+b-(a\omega+b)}{z-\omega}=\dfrac{a(z-\omega)}{z-\omega}=a$ donc a le coefficient de z nous indique les caractéristiques.

Premier cas : $a\in\mathbb{R}$.

La transformation est une homothétie de centre Ω et de rapport a.

Deuxième cas : $|a|=1$.

$a=e^{i\theta}$ et la transformation est une rotation de centre Ω et d'angle θ

Cas général seulement pour les spés.

$a=\rho e^{i\theta}$ et la transformation est une similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport ρ.