Transformations du plan

I Transformation.

Définition.

Une transformation t du plan est une bijection du plan dans lui-même.

Autrement dit :

c'est une fonction du plan dans lui-même dont l'ensemble de définition est le plan tout entier, tout point a une image unique.

de plus, tout point a un antécédent unique.

***Ou encore* :**

une transformation admet une transformation réciproque.

Remarque importante.

Un point a un antécédent unique donc deux points distincts ont des images distinctes. Si P et Q sont distincts alors leurs images par une transformation sont distinctes.

II Triangles semblables.

1 Triangles semblables.

Définition 1.

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'A'}{CA}=k$

Définition 2.

On appelle triangles semblables deux triangles dont les longueurs des côtés sont proportionnelles.

Conséquence.

$A'B'=k\,AB$, $B'C'=k\,AC$, $C'A'=k\,AC$.

2 Caractérisation des triangles semblables.

Théorème 1.

Deux triangles sont semblables si et seulement si deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre.

Démonstration.

Condition nécessaire.

D'après le théorème de Al-Kashi.

Dans le triangle ABC :

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\ AB\,AC\cos\widehat{C} \quad \text{donc} \quad \cos\widehat{C}=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\ AB\,AC}$$

ABC et $A'B'C'$ sont semblables donc $A'B'=k\,AB$, $B'C'=k\,AC$, $C'A'=k\,AC$.

$$\cos\widehat{C}'=\frac{A'C'^2+B'C'^2-A'B'^2}{2\ A'B'\ \ A'C'}=\frac{k^2\ AC^2+k^2\ BC^2-k^2\ AB^2}{2\ k\,AB\,k\,AC}=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\ AB\,AC}=\cos\widehat{C}$$

$\cos \widehat{C}' = \cos \widehat{C}$ donc $\widehat{C}' = \widehat{C}$

De même $\widehat{B}' = \widehat{B}$ (et bien sûr $\widehat{A}' = \widehat{A}$)

Condition suffisante.

D'après la loi des sinus.

Dans le triangle ABC :

$\dfrac{AB}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{BC}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{CA}{\sin \widehat{B}}$ donc les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus.

Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont "deux angles égaux" donc les "trois angles sont égaux", $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$, donc $\sin \widehat{A} = \sin \widehat{A'}$, $\sin \widehat{B} = \sin \widehat{B'}$, $\sin \widehat{C} = \sin \widehat{C'}$, donc les longueurs des côtés de $A'B'C'$ sont proportionnelles aux sinus des angles de ABC et donc proportionnelles aux longueurs des côtés de ABC.

Conséquences.

i. Les angles orientés correspondants de deux triangles semblables sont tous égaux deux à deux, on dit qu'ils sont directement semblables, ou tous opposés deux à deux, on dit qu'ils sont indirectement semblables.

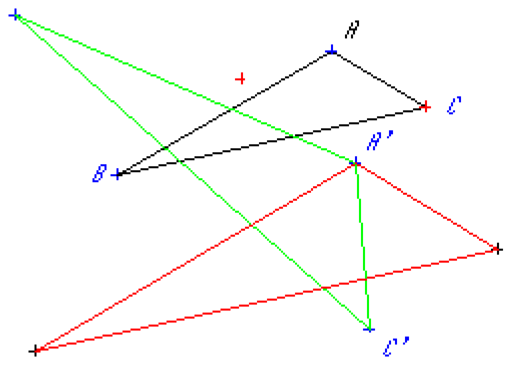
ii. Les angles orientés définis par les côtés correspondants de deux triangles directement semblables sont égaux.

Démonstration.

i. Les angles géométriques sont égaux.

Premier cas, $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})$

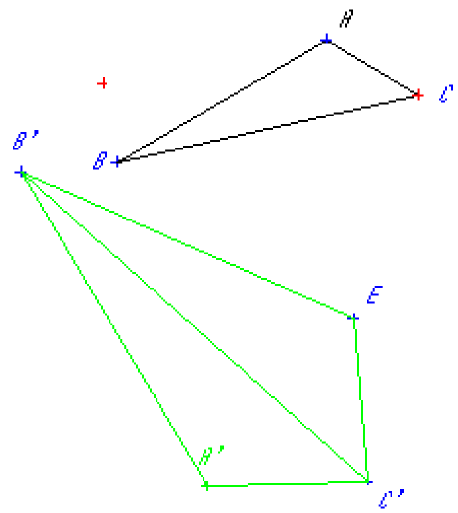
On effectue une rotation de centre A' et d'angle $(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{AB})$ qui conserve les angles orientés. Les triangles noir et rouge et verts ont des angles orientés égaux.



Deuxième cas, $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})$

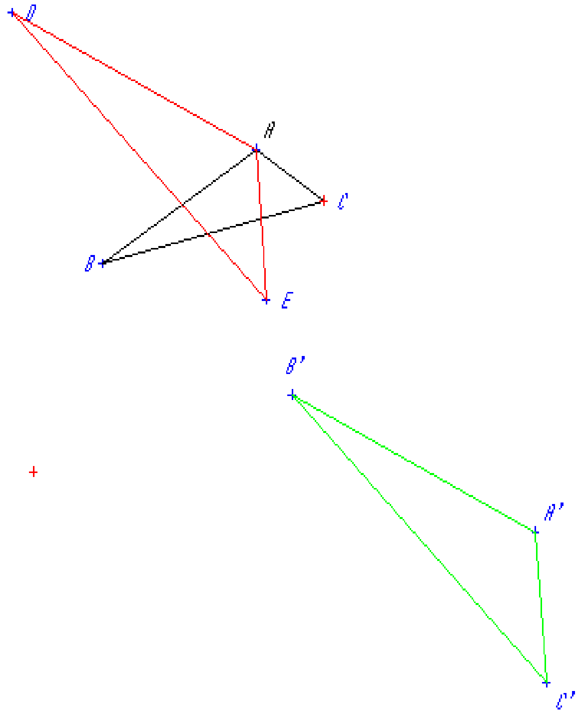
On effectue une réflexion d'axe $(B'C')$.

Les triangles $A'B'C'$ et $E'B'C'$ ont des angles opposés, et d'après le premier cas, les triangles ABC et $E'B'C'$ des angles égaux.



Dans le premier cas on dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables et dans le deuxième, indirectement semblables.

ii. *ADE* est le translaté de *A'B'C'* par la translation de vecteur $\overrightarrow{A'A}$



$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$$
$$=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD})$$

$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})$$
$$=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$$

Les triangles *ABC* et *A'B'C'* sont directement semblables donc $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{A'B'})$

La translation conservent les angles orientés donc $(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{A'B'})=(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD})$

$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{A'C'})$

On démontre de même les autres égalité.

Théorème 2.

Deux triangles sont semblables si et seulement si un angle de l'un est égal à un angle de l'autre et si les longueurs des côtés de ces angles sont proportionnelles.

Démonstration.

Condition nécessaire.

Deux triangles semblables ont des "angles égaux" et les longueurs des côtés sont proportionnelles.

Condition suffisante.

$\widehat{C'}=\widehat{C}$, $A'C'=k\,AC$ et $B'C'=k\,BC.$

D'après le théorème de Al-Kashi.

Dans le triangle *A'B'C'* :

$$A'B'^2=A'C'^2+B'C'^2-2\ A'B'\ \ A'C'\cos\widehat{C'}=k^2\left(AC^2+BC^2-2\ AB\,AC\cos\widehat{C}\right)=k^2\ AB$$

$A'B'>0$ et $AB>0$ donc $A'B'=k\,AB$

II Similitude.

1 Définition géométrique.

Notation.

Dans toute la suite du cours on notera avec un "prime" l'image d'un point par la similitude *s*, sauf si les notations sont précisés dans l'énoncé. On emploiera les deux écritures $s(M)$ et *M'* qui désigne toutes deux l'image de *M* par *s*.

Définition 1

Une similitude est une transformation qui conserve les rapports des longueurs.

D'après la remarque du I, cette définition peut s'écrire :

Définition 2

Une similitude est une transformation s qui vérifie pour tous points M, N, P et Q tels que $P \neq Q$ la relation :

$$\frac{MN}{PQ}=\frac{s(M)s(N)}{s(P)s(Q)} \quad \text{ou} \quad \frac{MN}{PQ}=\frac{M'N'}{P'Q'}$$

2 Caractérisation d'une similitude.

Théorème 3. Rapport d'une similitude.

Une transformation s est une similitude si et seulement si il existe un réel $k>0$ tel que pour tous points M et N, $s(M)s(N)=k\,MN$ ou $M'N'=k\,MN$

Démonstration.

Condition nécessaire.

Soit S une similitude et deux points distincts A et B alors d'après la remarque $s(A)\neq s(B)$ et $\frac{s(A)s(B)}{AB}=k>0.$ ou $\frac{A'B'}{AB}=k>0.$

Par définition, pour tous points M et N, $\frac{MN}{AB}=\frac{s(M)s(N)}{s(A)s(B)}$ ou $\frac{MN}{AB}=\frac{M'N'}{A'B'}$

Si $M=N$ alors $s(M)=s(N)$ et $s(M)s(N)=k\,MN$ ou $M'N'=k\,MN$

Si $M\neq N$ alors $s(M)\neq s(N)$ et la relation s'écrit :

$$\frac{s(A)s(B)}{AB}=\frac{s(M)s(N)}{MN}=k \quad \text{et} \quad s(M)s(N)=k\,MN$$

ou $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{M'N'}{MN}=k \quad \text{et} \quad M'N'=k\,MN$$

Condition suffisante.

k est un réel fixé strictement positif et s est une transformation vérifiant pour tous points M et N :

$$s(M)s(N)=k\,MN \quad \text{ou} \quad M'N'=k\,MN$$

Soient quatre points quelconque M, N, P et Q tels que $P\neq Q$ alors :

$s(M)s(N)=k\,MN$, $s(P)s(Q)=k\,PQ$ et $s(P)\neq s(Q)$ donc $\frac{s(M)s(N)}{s(P)s(Q)}=\frac{k\,MN}{k\,PQ}=\frac{MN}{PQ}$

ou $M'N'=k\,MN$, $P'Q'=k\,PQ$ et $P'\neq Q'$ donc $\frac{M'N'}{P'Q'}=\frac{k\,MN}{k\,PQ}=\frac{MN}{PQ}$

Définition.

k est appelé le rapport de la similitude.

Conséquences.

i. Une similitude de rapport k multiplie les longueurs par k.

ii. La composée d'une similitude de rapport k_1 et d'une similitude de rapport k_2 est une similitude de rapport $k_1 k_2$.

iii. La transformation réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

Démonstration.

i. Cette conséquence est évidente.

ii. Soit s_1 de rapport k_1 et s_2 de rapport s_2 pour tous points *M* et *N* :

$$s_2 \circ s_1(M)\, s_2 \circ s_1(N) = k_2\left(s_1(M)\, s_1(N)\right) = k_2\, k_1\, MN$$

ou si on note M_1 et N_1 les images respectives de *M* et *N* par s_1, M_2 et N_2 les images respectives de M_1 et N_1 par s_2 alors : $M_2 N_2 = k_2\, M_1 N_1 = k_2\, k_1\, MN$

iii. Tout point M' a un antécédent unique *M*, $s^{-1}(M') = M$ et $s(M) = M'$.
Tout point N' a un antécédent unique *N*, $s^{-1}(N') = N$ et $s(N) = N'$.

$k > 0$ et $M'N' = k\, MN$ donc $MN = \dfrac{1}{k} M'N'$ et s^{-1} est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$

III Image d'une droite.

Rappel sur les points alignés.

Trois points *A, B* et *C* sont alignés dans cet ordre si et seulement si $AB + BC = AC$

Théorème 4. Image d'une droite.

L'image d'une droite par une similitude est une droite.

Démonstration.

Soit une une similitude *s* de rapport *k* et une droite $d = (AB)$ et *C* un point de *d.*

Première étape, $s(d) \subset d'$.

Si $C \in [A\,;B]$ alors $AC + CB = AB$ et $k\,AC + k\,CB = k\,AB$ donc

$$s(A)s(C) + s(C)s(B) = s(A)s(B) \quad \text{ou} \quad A'C' + C'B' = A'B'$$

Les points $s(A)$, $s(B)$ et $s(C)$ sont alignés et $s(C) \in (s(A)s(B)) = d'$
ou les points A', B' et C' sont alignés et $C' \in (A'B') = d'$

Si $C \notin [A\,;B]$ alors $A \in [C\,;B]$ ou $B \in [A\,;C]$ et on démontre de même que les points sont alignés.

Donc <u>l'image d'un point de *d* appartient à la droite *d'*</u>, $s(d) \subset d'$.

Deuxième étape, $d' \subset s(d)$.

s^{-1} est une similitude donc $s^{-1}(d')$ est une droite contenant *A* et *B* et $s^{-1}(d') \subset d$

$$\text{donc} \quad s \circ s^{-1}(d') = d' \subset s(d).$$

ou, soit *M'* un point de *d'* alors il a un antécédent unique *M* et $s^{-1}(M') = M$
$s^{-1}(A') = A$ et $s^{-1}(B') = B$, s^{-1} est une similitude donc $M \in (AB) = d$
Tout point *M'* de *d'* est l'image d'un point *M* de *d* par *s*

$$\text{donc} \quad d' \subset s(d).$$

Conclusion. $s(d) \subset d'$ et $d' \subset s(d)$ donc $s(d) = d'$

Conséquence.

i. L'image d'un segment de longueur *l* est un segment de longueur *k l*.

ii. L'image réciproque d'une droite, $s^{-1}(d')$, est une droite, autrement dit, l'ensemble des points *M* tels que $s(M)$ appartient à une droite *d'* est une droite.

iii. L'image d'un triangle est un triangle semblable.

iiii. Une similitude conserve le parallélisme.

Démonstration.

i. On fait la même démonstration en remplaçant *d* par $[AB]$.

ii. s^{-1} est une similitude et on applique le théorème 2.

iii. Soit *ABC* un triangle et *A'*, *B'* et *C'* les images des sommets.

D'après le *ii.* si *A'*, *B'* et *C'* sont alignés alors *A*, *B* et *C* sont alignés ce qui contredit l'hypothèse, donc *A'*, *B'* et *C'* ne sont pas alignés.

L'image d'un segment de longueur *l* est un segment de longueur *kl* donc *A'B'C'* est un triangle semblable à *ABC* .

iiii. Soit *d* et δ deux droites parallèles et d' et δ' leurs images respectives.

Ou d' et δ' ont un point commun *M* alors d'après le *ii.* *M* est l'image d'un point *A* de *d* et d'un point *B* de δ. *M* a un antécédent unique donc *A*=*B* et $d=\delta$.

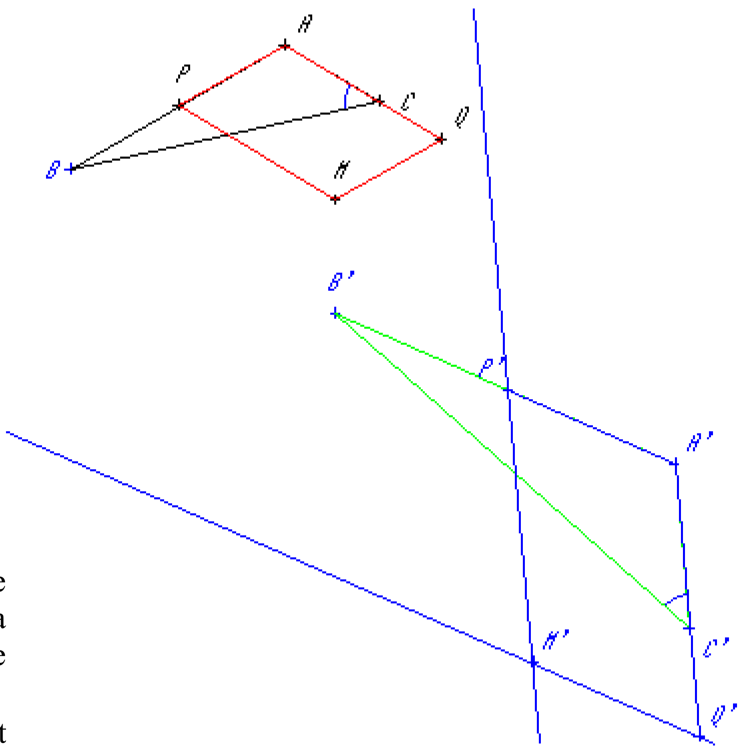
Ou d' et δ' n'ont pas de point commun et sont parallèles.

IV Détermination d'une similitude.

1 Similitude et triangles semblables.

Théorème 5.

Soient *ABC* et *A'B'C'* deux triangles semblables ayant comme sommets correspondants *A* et *A'*, *B* et *B'*, *C* et *C'*. Il existe une unique similitude *s* qui transforme *A* en *A'*, *B* en *B'*, *C* en *C'*.



Démonstration.

Soit une fonction *s* du plan qui transforme *A* en *A'*, *B* en *B'* et *C* en *C'*.

Construction de l'image de M.

Soit un point *M* et *APMQ* est le parallélogramme dont le support de [*AP*] est la droite (*AB*) et le support de [*AQ*] est la droite (*AC*) donc $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}=n\overrightarrow{AC}$

Définissons *P'* par $\overrightarrow{A'P'}=m\overrightarrow{AB}$ et *Q'* par $\overrightarrow{A'Q'}=n\overrightarrow{AC}$ et *M'* comme un sommet du parallélogramme *A'P'M'Q'*.

M' est définie d'une façon unique donc on a défini une fonction s du plan dans le plan.

Antécédent de M'.

$A'P'M'Q'$ est le parallélogramme dont le support de $[A'P']$ est la droite $(A'B')$ et le support de $[A'Q']$ est la droite $(A'C')$ et par la même méthode, le point M sommet du parallélogramme $APMQ$ est un antécédent de M'. Donc tout point a un antécédent.

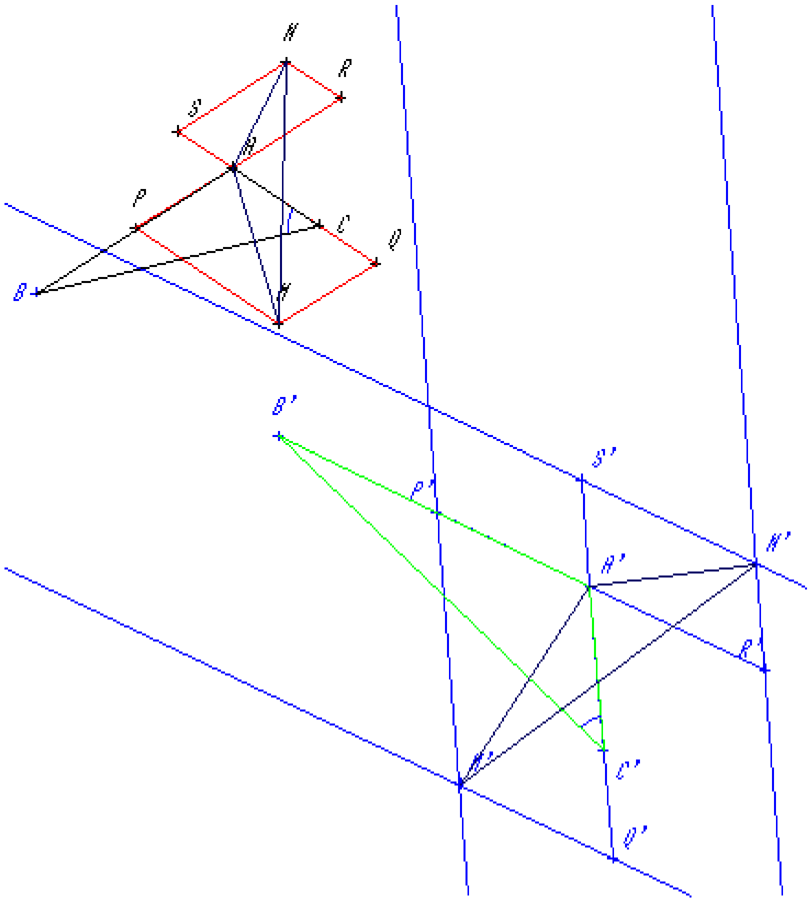
Si $M'=s(M)=s(N)$ par construction $APMQ$ et $APNQ$ sont deux parallélogramme donc $M=N$ et s est une bijection donc une transformation.

s est une similitude.

ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles semblables donc $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'A'}{CA}=k$

Par construction, $AP=k\,A'P'$, $P'M'=A'Q'=k\,AQ=k\,PM$ et $\widehat{APM}=\widehat{A'P'M'}=\pi-\widehat{A}$ donc les triangles sont semblables et $A'M'=k\,AM$

De même $A'N'=k\,AN$



Les triangles $A''M'Q'$ et AMQ sont semblables donc $\widehat{M'A'Q'}=\widehat{MAQ}$

De même $\widehat{N'A'R'}=\widehat{NAR}$

$\widehat{Q'A'R'}=\widehat{QAR}=\pi-\widehat{BAC}$

Donc $\widehat{N'A'M'}=\widehat{NAM}$

$A'M'=k\,AM$ et $A'N'=k\,AN$ donc les triangles $A'M'N'$ et AMN sont semblables.

M et N sont quelconques donc pour tous points M et N, $M'N'=k\,MN$

Unicité.

Soit t une similitude qui transforme A en A', B en B' et C en C' et $t(P)=P_1$

t transforment un segment de (AB) de longueur l est un segment de $(A'B')$ de longueur kl donc $P_1=P'$ (deux cas à étudier selon la position de P) .

De même $t(Q)=Q'$

Une similitude conserve le parallélisme donc $t(M)=s(M)$

V Similitude directe.

1 Définition.

Définition.

Une similitude directe conservent les angles orientés.

Conséquences.

i. L'image d'un triangle est un triangle directement semblable.

ii. Il existe un réel θ tel que pour tous points M et N, $(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{MN})=\theta+2k\pi$

θ est appelé l'angle de la similitude.

Démonstration.

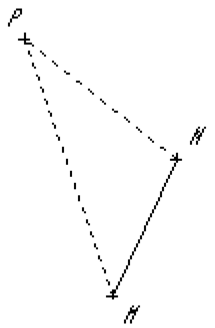
i. C'est la définition d'un triangle directement semblable.

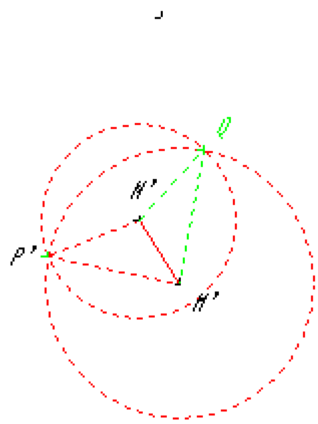
ii. C'est une propriété des triangles directement semblables.

IV Détermination d'une similitude directe.

Théorème 6.
Soit quatre points *M*, *N*, *M'* et *N'* vérifiant $M\neq N$ et $M'\neq N'$. Il existe une unique similitude directe qui transforme *M* en *M'* et *N* en *N'*.

Démonstration.
Soit $k=\dfrac{M'N'}{MN}$ et *P* un point n'appartenant pas à la droite (MN).





Il existe exactement deux triangles semblables à *MNP* tels que *M* et *M'* soient correspondants et *N* et *N'* soient correspondants. Le troisième sommet est un point d'intersection du cercle de centre *M'* et de rayon *kMP* et du cercle de centre *N'* et de rayon *kNP*.

Ces deux triangles sont indirectement semblables donc un seul, *M'N'P'*, est directement semblable à *MNP*.

Toute similitude directe, qui transforme *M* en *M'* et *N* en *N'*, transforme *P* en *P'*.
D'après le théorème 5, il existe une unique similitude transformant *MNP* en *M'N'P'* et elle est directe.

Conséquences.
La similitude directe ainsi définie a pour rapport $k=\dfrac{M'N'}{MN}$ et pour angle $\theta=(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'})$