Equations d'une droite

Préambule.
Le plan est muni d'un repère $\left(O~;~\vec{i}~;~\vec{j}\right)$
Une droite du plan *d* est définie par deux points distincts, $d=(AB)$, ou par un point et un vecteur directeur, $d=(A~;~\vec{u})$.
On passe d'une définition à l'autre en posant $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

I Equation cartésienne d'une droite du plan.

1 Existence d'une équation cartésienne.

Théorème 1
Toute droite du plan admet une équations de la forme $ax+by+c=0$.

Démonstration.

Soit le point $A(x_A; y_A)$, le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ et la droite $d=(A~;~\vec{u})$.
$M(x;y)\in d$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$.
$\overrightarrow{AM}(x-x_A; y-y_A)$ et $\vec{u}(-b;a)$ ont des coordonnées proportionnelles donc :

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$$
$$ax+by+(-ax_A-by_A)=0$$

En posant $c=(-ax_A-by_A)$ on obtient $ax+by+c=0$.

Conséquences.

Si $ax+by+c=0$ est une équation de *d* alors, pour tout *k* non nul, $kax+kby+kc=0$ et aussi une équation de *d*.
Il suffit de choisir comme vecteur directeur $\vec{v}=k\vec{u}$.

Si $ax+by+c=0$ est une équation de *d* alors $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de *d*.

2 Une équation cartésienne est une équation d'une droite du plan.

Théorème 2
Une équations de la forme $ax+by+c=0$, telle que *a* et *b* ne soient pas tous les deux nuls, est une équation d'une droite du plan.

Démonstration.

a et *b* ne sont pas tous les deux nuls donc $ax+by+c=0$ admet une infinité de solutions.

Soit $(x_A; y_A)$ une solution particulière de l'équation $ax+by+c=0$, *A* le point de cordonnées $(x_A; y_A)$, $\vec{u}$ le vecteurde cordonnées $(-b;a)$ et la droite $d=(A~;~\vec{u})$.

Tout couple solution $(x;y)$ vérifie $ax+by+c=0$.
Le couple $(x_A; y_A)$ vérifie $ax_A+by_A+c=0$.

En faisant la différence de ces deux égalités on obtient $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$ donc $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ et le point $M(x\,;y)$ appartient à la droite $d=(A\ ;\vec{u})$.

Conséquences.

Pour a nul.
La droite *d* d'équation $by+c=0$ est parallèle à l'axe $(O\,;\vec{i})$
Un vecteur directeur est $\vec{u}(-b\,;0)=-b\,\vec{i}$.

Pour *b* nul.
La droite *d* d'équation $ax+c=0$ est parallèle à l'axe $(O\,;\vec{j})$
Un vecteur directeur est $\vec{u}(0\,;a)=a\,\vec{j}$.

Pour *c* nul.
La droite *d* d'équation $ax+by=0$ passe par l'origine *O*.
$(0\,;0)$ est solution de l'équation $ax+by=0$

3 Exemple.

Soit les points $A(2\,;3)$ et $B(7\,;-2)$.
Un vecteur directeur de la droite $d=(A\,;B)$ est $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(5\,;-5)$.
$M(x\,;y)\in d$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$.
$\overrightarrow{AM}(x-2\,;y-3)$ et $\vec{u}(5\,;-5)$ ont des coordonnées proportionnelles donc :

$$-5(x-2)-5(y-3)=0$$
$$-5x-5y+10+15=0$$

En simplifiant par -5 on obtient : $x+y-5=0$.

Vérification.
Pour A : 2 + 3 - 5 =0 donc $A\in d$.
Pour B : 7 - 2 - 5 = 0 donc $B\in d$.

Remarque. Un autre vecteur directeur de *d* est $\vec{v}(-1\,;1)$ ou encore $\vec{w}(1\,;-1)$.

II Equation réduite.

1 Cas particulier. Droite parallèle à l'axe $(O\,;\vec{j})$.

Dans ce cas *b* est nul et a non nul, une équation de *d* est $ax+c=0$ et l'équation réduite est de la forme $x=\frac{-c}{a}$ ou encore $x=d$

2 Cas général. Droite non parallèle à l'axe $(O\,;\vec{j})$.

Dans ce cas *b* est non nul et en "isolant" *y* on obtient :

$$ax+by+c=0$$
$$by=-ax-c$$

$$b \neq 0 ,\ y = \frac{-a}{b} x - \frac{c}{b}$$

En posant $p = \frac{-a}{b} ,\ q = \frac{-c}{b}$

$$y = px + q$$

3 Coefficient directeur.

d est une droite non parallèle à l'axe $(O ; \vec{j})$ d'équation réduite $y = px + q$

***Définition*.**
Le nombre *p* est appelé le coefficient directeur (ou pente en physique) de la droite *d*.

Théorème 3.
Le coefficient directeur de la droite $d = (AB)$ est $p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Démonstration.
$A \in (AB)$ donc $y_A = p\, x_A + q$
$B \in (AB)$ donc $y_B = p\, x_B + q$
En faisant la différence des deux égalités on obtient :

$$y_B - y_A = p(x_B - x_A)$$

d est une droite non parallèle à l'axe $(O ; \vec{j})$, *A* et *B* sont distincts donc $x_B \neq x_A$ et

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Coefficient directeur et vecteur directeur.
d est une droite non parallèle à l'axe $(O ; \vec{j})$ d'équation réduite $y = px + q$, elle a donc une équation cartésienne de la forme $px - y + q = 0$ et un vecteur directeur égal à $\vec{u}(1 ; p)$.

4 Ordonnée à l'origine.

***Définition*.**
Le nombre *q* est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite d.

Théorème 4.
q est l'ordonnée du point d'intersection de la droite *d* et de l'axe des ordonnées (d'où son nom, ordonnée du point au dessus ou en dessous de l'origine).

Démonstration.

Si $x = 0$ alors $y = q$.

5 Exemple.

Soit les points $A(2 ; 3)$ et $B(7 ; -2)$.
La droite $d = (AB)$ a pour coefficient directeur $p = \frac{-2-3}{7-2} = -1$ donc sont équation réduite est

de la forme $y=-x+q$.

$A\in d$ donc $3=-2+q$ et $q=5$.

Une équation réduite de $d=(AB)$ est $y=-x+5$

Vérification.
Pour A : -2 + 5 = 3 et $y_A=3$ donc $A\in d$
Pour B : -7 + 5 = - 2 et $y_B=-2$ donc $B\in d$

III Droites parallèles.

Caractérisation.
Deux droites d et δ sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Théorème 5.
Les droites d et δ d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si $(a;b)$ et $(a';b')$ sont proportionnels.

Démonstration.

Les droites d et δ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(-b;a)$ et $\vec{v}(-b';a')$

Si les droites d et δ parallèles alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc $-ba'-(-b')a=0$ $ab'-a'b=0$ donc $(a;b)$ et $(a';b')$ sont proportionnels.

Si $(a;b)$ et $(a';b')$ sont proportionnels alors $ab'-a'b=0$ et $-ba'-(-b')a=0$ donc les droites d et δ parallèles.

Théorème 6.
Les droites d et δ, non parallèles à l'axe $(O;\vec{j})$ sont parallèles, si et seulement si elles sont le même coefficient directeur.

Démonstration.

Les droites d et δ ont pour coefficients directeurs respectifs p et p' donc pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(1;p)$ et $\vec{v}(1;p')$

Les droites d et δ sont parallèles si et seulement si $1p'-1p=0$ ou encore $p=p'$.

Pour les exercices d'entrainement sur l'équation réduite, télécharger le logiciel GraphExotica et faites les exercices et les évaluations.