La relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$

I Les bases.

1 Relation d'ordre.

Pour tout couple de nombres réels (a ; b) : $a \le b$ ou $b \le a$. (a inférieur à b ou b inférieur à a).

2 Les « opérations » dans $\mathbb{R}$

Il y a deux opérations dans IR :

l'addition +. Tout nombre b a un opposé -b et $a - b = a + (-b)$

la multiplication x. Tout nombre b, non nul, a un inverse $\frac{1}{b}$ et $\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$.

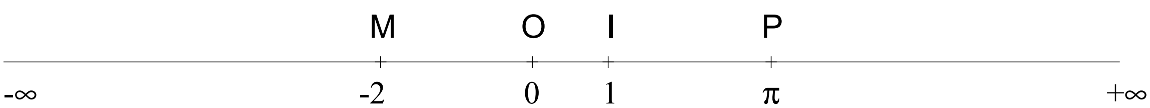
3 La droite réelle.

On définit un repère (O ; I) sur une droite d. A chaque point M de la droite on fait correspondre un nombre réel x_M appelé abscisse de M.

$x_O = 0$ et $x_I = 1$

$M \in [OI) \Rightarrow x_M \geq 0$. $M \notin [OI) \Rightarrow x_M \leq 0$.

La valeur absolue de x_M, notée $|x_M|$, est la longueur OM.



Exemple. Sur ce schéma : $|x_M| = |-2| = OM = 2$ $|x_P| = |\pi| = OP = \pi$

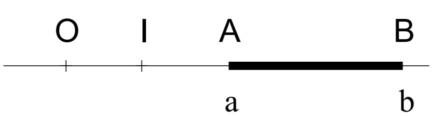
Remarque. La grande majorité des nombres réels ne peut pas s'écrire sous la forme d'une suite finie (comme 1,456) ou même cyclique infinie (comme = 0,33333...) de chiffres.

Sur ce schéma les signes -∞ (moins l'infinie) et +∞ (plus l'infinie) signifient qu'il n'y a pas de limites, il existe des nombres aussi grand que l'on veut (10^{1000}, $10^{100000000}$...) ou aussi « petit » que l'on veut (-10^{1000}, $-10^{100000000}$...).

Attention. -∞ et +∞ sont des signes et ne sont surtout pas des nombres réels.

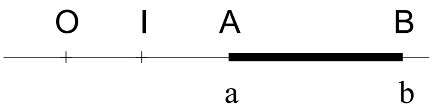
4 Les intervalles.

a Sur la droite réelle.

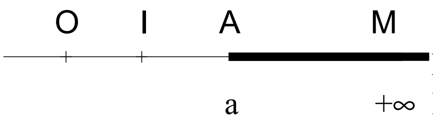


Segment [AB] (tous les points entre A et B, A et B compris).

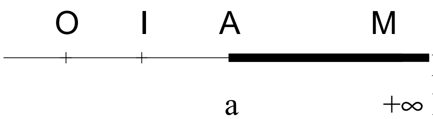
Intervalle [a ; b] (tous les nombre entre a et b, a et b compris).



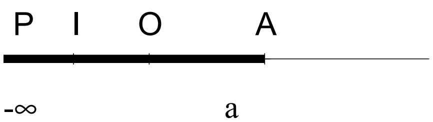
Segment]AB[(tous les points entre A et B, mais ni A, ni B).
Intervalle]a ; b[(tous les nombre entre a et b, mais ni a, ni b).



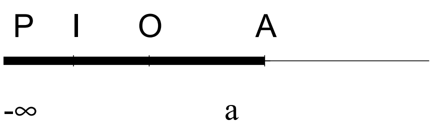
Demi-droite [AM) (tous les points à droite de A, A compris).
Intervalle [a ; +∞[(tous les nombre supérieur à a, a compris).



Demi-droite]AM) (tous les points à droite de A, A non compris).
Intervalle]a ; +∞[(tous les nombre supérieur à a, a non compris).



Demi-droite (PA] (tous les points à gauche de A, A compris).
Intervalle]-∞ ; a] (tous les nombre inférieur à a, a compris).



Demi-droite (PA[(tous les points à gauche de A, A non compris).
Intervalle]-∞ ; a [(tous les nombre inférieurà a, a non compris).

b Définition algébrique.

Intervalles fermés.

$[a ; b] = \{x \in IR,\ a \leq x \leq b\}$
$[a ; +\infty[= \{x \in IR,\ x \geq a\}$
$]-\infty ; a] = \{x \in IR,\ x \leq a\}$

Intervalles ouverts.

$]a ; b[= \{x \in IR,\ a < x < b\}$
$]a ; +\infty[= \{x \in IR,\ x > a\}$
$]a ; +\infty[= \{x \in IR,\ a < x\}$

Intervalles ni fermés, ni ouverts.

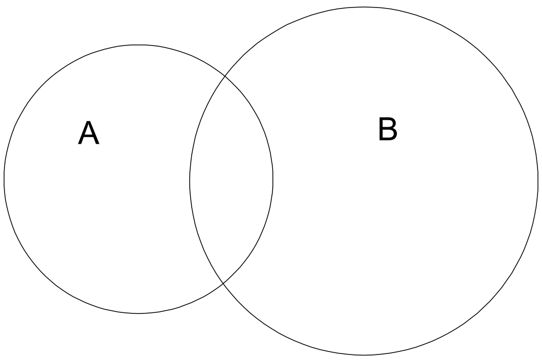
$[a ; b[= \{x \in IR,\ a \leq x < b\}$
$]a ; b] = \{x \in IR,\ a < x \leq b\}$

On lit : « l’intervalle fermé [a ; b] est l’ensemble des nombres réel supérieur (ou égal) à a et inférieur (ou égal) à b ».

« l’intervalle ouvert]a ; b[est l’ensemble des nombres réel strictement supérieurs à a et strictement inférieur à b ».

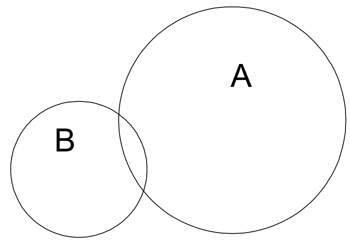
5 Opérations sur les ensembles.

a L'intersection, ∩.



$A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\}$
C'est la partie commune à A et B.
On lit : « A inter B ».
Si A est jaune et B est rouge alors
$A \cap B$ est orange.

b L'union, ∪.



$A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in A \cap B\}$
Ca a le même sens que « Union Européenne ».
On lit : « A union B ».
Si A est vert et B est vert alors $A \cup B$ est toute la partie verte.

c Exemples.

$I = [-3 ; 4]$ $J = [-1 ; 6[$ $K =]5 ; 12[$
$I \cap J = [-1 ; 4]$
$I \cap K = \emptyset = \{ \}$
$K \cap J =]5 ; 6[$

$I \cup J = [-3 ; 6[$
$I \cup K = [-3 ; 4] \cup]5 ; 12[$
$K \cup J = [-1 ; 12[$